ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος
2. Η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του A είναι ο I_n
3. Ο A είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΕΥΡΕΣΗΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$

1. Σχηματίζουμε τον $n \times 2n$-πίνακα $(A \mid I_n)$
2. Βρίσκουμε την ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του (A/I_n), η οποία θα είναι της μορφής: $(B \setminus A')$
3. $\begin{cases} \text{Αν } B \neq I_n \text{, τότε ο } A \text{ δεν είναι αντιστρέψιμος} \\ \text{Αν } B = I_n \text{, τότε ο } A \text{ είναι αντιστρέψιμος και } A^{-1} = A' \end{cases}$

Αν $B = I_n$, τότε υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \dots E_p$:

$$E_p E_{p-1} \dots E_2 \cdot E_1 = I_n \text{ και τότε } A^{-1} = E_p \cdot E_{p-1} \dots E_2 \cdot E_1$$

Παράδειγμα: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Να βρεθεί εάν είναι αντιστρέψιμος και να τον βρούμε.

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \mapsto \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \mapsto -\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 + 2\Gamma_2]{\Gamma_1 \mapsto \Gamma_1 - 3\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_2 \mapsto \Gamma_2 + \Gamma_3]{\Gamma_1 \mapsto \Gamma_1 - 3\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Σύμφωνα με τον Αλγόριθμο: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ένα γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους $x_1, x_2 \ldots x_n$ είναι της μορφής:

$$(\Sigma) \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = b_1 & (\Sigma_1) \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots \alpha_{2n}x_n = b_2 & (\Sigma_2) \\ \vdots & (\Sigma_3) \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots \alpha_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

όπου $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

$b_{ij} \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq m$

Τα $x_1, x_2 \ldots x_n$ καλούνται οι αγνωστοι του (Σ)

Τα α_{ij} καλούνται συντελεστές του (Σ)

Τα b_i καλούνται σταθεροί όροι του (Σ)

Τότε: (Σ) $A \cdot X = B$

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$

$X \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$

$B \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ καλείται ο πίνακας των συντελεστών του (Σ)

Ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$ καλείται ο πίνακας-στήλη των σταθερών όρων του (Σ)

Ο πίνακας $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ καλείται ο πίνακας-στήλη των αγνώστων του (Σ)

Λύση του (Σ) καλείται κάθε n-άδα αριθμών $y_1, y_2, \dots y_n \in \mathbb{K}$ η οποία γράφεται ως $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ έτσι ώστε: $Ay = B$

① Το (Σ) καλείται **συμβιβαστό** $\Leftrightarrow$ (αν και μόνο αν) έχει τουλάχιστον μια λύση

② Το (Σ) καλείται **αδύνατο** $\Leftrightarrow$ δεν έχει καμία λύση

③ Το (Σ) καλείται **ομογενές** $\Leftrightarrow$ $B=0$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Κάθε ομογενές σύστημα είναι συμβιβαστό, διότι έχει πάντα τη μηδενική λύση: $x=0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$(\Sigma)\begin{cases} y+3z=-2 \\ x+2y+6z=0 \\ 2x+3y+9z=1 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

τότε $A \cdot X = B$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ο $m \times (n+1)$-πίνακας:

$$(A|B)=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \dots \alpha_{1n} & b_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \quad \alpha_{2n} & b_2 \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} \quad \alpha_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

καλείται ο **επαυξημένος πίνακας** του (Σ)

Έστω (Σ) $A \cdot X = B$ και (Σ') $A' \cdot X' = B'$ όπου $A, A' \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$

Τα (Σ), (Σ') καλούνται ισοδύναμα $\Leftrightarrow$ έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων

Διαδικασία λύσης του (Σ): (Μέθοδος απαλοιφής του Gauss)

① Αμοιβαία εναλλαγή δύο από τις εξισώσεις του (Σ): $(\Sigma_i) \leftrightarrow (\Sigma_j)$

② Πολλαπλασιάζουμε μια από τις εξισώσεις του Σ με ένα $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$
: $(\Sigma_i) \longmapsto (\lambda \Sigma_i)$

③ Προσθέτουμε σε μια εξίσωση πολλαπλάσιο μιας άλλης: $(\Sigma_i) \mapsto (\Sigma_i) + (\lambda \Sigma_j)$

Πρόταση: Έστω (Σ): $A \cdot X = B$, $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$
Αν $M \in \mathbb{M}_m(\mathbb{K})$ είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας, και έστω το σύστημα
$(\Sigma'): (M \cdot A) \cdot X = M \cdot B$ Τότε τα $(\Sigma), (\Sigma')$ είναι ισοδύναμα

Απόδειξη: • Έστω Y: λύση του $(\Sigma) \Rightarrow A \cdot Y = B \Rightarrow M(A \cdot Y) = M \cdot B$
$\Rightarrow (M \cdot A) Y = M \cdot B \Rightarrow Y$: λύση του (Σ')
• Έστω ότι Y λύση του $(\Sigma') \Rightarrow (M \cdot A) Y = M \cdot B \Rightarrow M(A \cdot Y) = M \cdot B$
$\Rightarrow M^{-1} \cdot M (A \cdot Y) = M^{-1} \cdot M \cdot B \Rightarrow A \cdot Y = B \Rightarrow Y$ λύση του (Σ) ■

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΟΥ (Σ)

Έστω (Σ) $A \cdot X = B$, $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$

1ο ΒΗΜΑ Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα $(A|B)$ του (Σ)

2ο ΒΗΜΑ Βρίσκουμε την ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή $(A|B)$, έστω αυτή είναι ο πίνακας $(A'|B')$

3ο ΒΗΜΑ Σχηματίζουμε το σύστημα: $(\Sigma'): A' \cdot X = B'$ το οποίο είναι ισοδύναμο με το (Σ) και έχει πολύ απλούστερη μορφή. Έτσι βρίσκουμε τις λύσεις του (Σ') οι οποίες είναι οι λύσεις του αρχικού (Σ)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: 1#

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -6 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \mapsto \Gamma_2 - 3\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_2 \mapsto -\frac{1}{2}\Gamma_2]{\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 - 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & -6 \end{array}\right)$$

3/10/2017

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 + 4\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_3 \mapsto \frac{1}{5}\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{\Gamma_2 \mapsto -\frac{1}{2}\Gamma_2 \\ \Gamma_1 \mapsto \Gamma_1 - \Gamma_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \mapsto \Gamma_2 - 2\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) = (A' \mid B')$$

Ο πίνακας $(A' \mid B')$ είναι επαυξημένος πίνακας του $(\Sigma'): A' \cdot X = B'$

$x_1 = 1$
$x_2 = 3$
$x_3 = -2$

και άρα η (μοναδική) λύση του (Σ) είναι η $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2# (αδύνατο σύστημα)

$$(\Sigma) \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_4 \mapsto \Gamma_4 - \Gamma_1]{\substack{\Gamma_2 \mapsto \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 - \Gamma_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \mapsto \frac{1}{4}\Gamma_3]{\Gamma_4 \mapsto \Gamma_4 + \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_4 \mapsto \Gamma_4 - 4\Gamma_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3# (άπειρες λύσεις)

$$(\Sigma)\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 8 & 12 & -9 & 8 \\ 4 & 6 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A|B) \xrightarrow{\text{γραμμοπράξεις}} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 0 \\ x_3 - \frac{4}{5}x_4 = 0 \end{cases}$$

Θέτουμε $x_4 = \lambda \in \mathbb{K}$ (δίνουμε αυθαίρετες τιμές στο x_4)

τότε: $x_3 = \frac{4}{5}\lambda$

$$x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\lambda\right) + \frac{1}{2}\lambda = 0$$

Θέτουμε $x_2 = \mu \in \mathbb{K}$ και τότε:

$$x_1 = -\frac{3}{2}\mu + \frac{4}{10}\lambda - \frac{5}{10}\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{3\mu}{2} + \frac{9}{10}\lambda$$

Το (Σ) έχει άπειρες λύσεις άρα

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\mu - \frac{1}{10}\lambda \\ \mu \\ 4/5\,\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

λ, μ παίρνουν αυθαίρετες τιμές από το $\mathbb{K}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα γραμμικό σύστημα

$(\Sigma): \quad A\cdot X = B \qquad A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$

καλείται σύστημα **Cramer** $\Leftrightarrow$ $m=n$ και ο A: αντιστρέψιμος

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω (Σ) $A\cdot X=B$ ένα σύστημα Cramer. Τότε το (Σ) έχει μοναδική λύση, την εξής:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} \cdots \alpha_{1i-1} & B_1 & \alpha_{1i+1} \cdots \alpha_{1n} \\ \alpha_{n1} \cdots \alpha_{ni-1} & B_n & \alpha_{ni+1} \cdots \alpha_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad i=1,\dots,n$$

Ιδιαίτερα ένα ομογενές σύστημα Cramer έχει μοναδική λύση την μηδενική.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Επειδή ο A είναι αντιστρέψιμος, έπεται ότι υπάρχει ο A^{-1} και τότε: $A^{-1}\cdot(A\cdot X) = A^{-1}\cdot B \Rightarrow (A^{-1}\cdot A)\cdot X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow$

$$X = A^{-1}\cdot B$$

Άρα το (Σ) έχει μοναδική λύση την $X = A^{-1}\cdot B$

Γνωρίζουμε ότι: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,adj(A)$. Τότε: $X = \frac{1}{|A|}\cdot adj(A)\cdot B$

$\Rightarrow \forall\, i=1,\dots,n$ ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα

$$x_i = \frac{1}{|A|}(adj(A)\cdot B)_i = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n} A_{ki}B_k = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1i-1} & B_1 & \alpha_{1i+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{ni-1} & B_n & \alpha_{ni+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ θεωρούμε το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{l} x-y+z=3 \\ x+y+\lambda z=1 \\ x+\lambda y+z=\lambda \end{array}\right.$$

Λύση:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \end{array}\right)$$

1ος ΤΡΟΠΟΣ

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \mapsto \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \lambda-1 \\ \lambda+1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda+1)$$

1η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Αν $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$ τότε $|A| \neq 0 \Rightarrow$ το (Σ) σύστημα Cramer $\Rightarrow$ το (Σ) έχει μοναδική λύση την:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{vmatrix}}{-(\lambda-1)(\lambda+1)} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix}}{-(\lambda-1)(\lambda+1)} = \frac{\lambda-3}{\lambda+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \end{vmatrix}}{-(\lambda-1)(\lambda+1)} = -\frac{4}{\lambda+1}$$

2η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: $\lambda = 1$ Τότε:

$$(\Sigma) \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 2x + 2z = 4 \Rightarrow \\ x + z = 2 \\ y = -1 \end{matrix}$$

Τότε θέτοντας $z = k \in \mathbb{R}$, θα έχουμε $x = 2 - k$

$y = -1$ $(k \in \mathbb{R})$ Το (Σ)

$z = k$ έχει άπειρες λύσεις

7/11/2017

3η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: $\lambda=-1$ Τότε:

$$(\Sigma)\begin{cases} x-y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ x-y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow \text{ το } (\Sigma) \text{ αδύνατο}$$

$\boxed{\text{2ος ΤΡΟΠΟΣ}}$

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3-\Gamma_1]{\Gamma_2 \mapsto \Gamma_2-\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & \lambda-3 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \mapsto \frac{1}{2}\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{\lambda-1}{2} & -1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & \lambda-3 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3-(\lambda+1)\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{\lambda-1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{2} & 2(\lambda-1) \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \mapsto \Gamma_1+\Gamma_2}$$

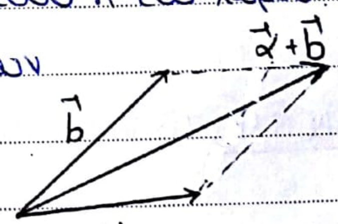
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{\lambda+1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{\lambda-1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{2} & 2(\lambda-1) \end{array}\right)$$

μετά συνεχίζουμε με τις περιπτώσεις

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Έστω V το σύνολο όλων των διανυσμάτων του επιπέδου ή του χώρου.

① Στο σύνολο V ορίζεται η πρόσθεση διανυσμάτων
αν $\vec{a},\vec{b}\in V$, τότε ορίζεται το διάνυσμα $\vec{a}+\vec{b}$



ιδιότητες πρόσθεσης

(α) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

(β) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

(γ) Υπάρχει το μηδενικό $\vec{a}$ διάνυσμα $\vec{0}$ και $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}$

(δ) $\forall\, \vec{a}\in V: \exists\, -\vec{a}\in V: \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}=(-\vec{a})+\vec{a}$

② Στο σύνολο V ορίζεται και η πράξη βαθμωτού πολλαπλασιασμού αριθμού $\lambda \in \mathbb{R}$ με διάνυσμα $\vec{\alpha}$, το αποτέλεσμα είναι ένα διάνυσμα $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ και το οποίο ορίζεται ως εξής:

- το μέτρο του $\lambda \cdot \vec{\alpha} = |\lambda|$ μέτρο του $\vec{\alpha}$
- τα $\vec{\alpha}, \lambda\vec{\alpha}$ έχουν την ίδια διεύθυνση
- φορά του $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ είναι η φορά του $\vec{\alpha}$ αν $\lambda > 0$ $\vec{0}$, $\lambda = 0$ αντίθετη της φοράς του $\vec{\alpha}$ αν $\lambda < 0$

Ιδιότητες Βαθμωτού Πολλαπλασιασμού

ⓐ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{\alpha} \in V$: $(\lambda + \mu) \cdot \vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu \cdot \vec{\alpha}$

ⓑ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{\alpha}, \vec{b} \in V$: $\lambda(\vec{\alpha} + \vec{b}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{b}$

ⓒ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{\alpha} \in V$: $\lambda(\mu \cdot \vec{\alpha}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{\alpha}$

ⓓ $\forall \vec{\alpha} \in V$: $1 \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$

Έστω V ένα τυχαίο σύνολο, και $\mathbb{K}$ ένα άλλο μη-κενό σύνολο.
Εσωτερική πράξη επί του V είναι μια απεικόνιση.

$$* : V \times V \longrightarrow V$$
$$(x, y) \longmapsto x * y$$

Εξωτερική πράξη του $\mathbb{K}$ επί του V είναι μια απεικόνιση.

$$\cdot : K \times V \to V$$
$$(\kappa, x) \longmapsto \kappa \cdot x$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ① Η πρόσθεση διανυσμάτων είναι μια εσωτερική πράξη επί του V: σύνολο διανυσμάτων του χώρου ή του επιπέδου, η πρόσθεση πινάκων, η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός αριθμών.
② Ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα είναι μια εξωτερική πράξη του $\mathbb{R}$ επί του V.

ΟΡΙΣΜΟΣ Αν $\mathbb{K}$ είναι ένα σώμα, τότε ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$ είναι μια τριάδα $(V,+,\cdot)$, όπου V είναι ένα σύνολο, $+ : V\times V \to V$ είναι μια εσωτερική πράξη επί του V, και $\cdot : \mathbb{K}\times V \longrightarrow V$ είναι μια εξωτερική πράξη του $\mathbb{K}$ επί του V, έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα: [από τώρα τα στοιχεία του V θα καλούνται διανύσματα και θα συμβολίζονται με $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, κλπ]

1. $\forall\ \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in V : \vec{x}+(\vec{y}+\vec{z}) = (\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}$
2. $\forall\ \vec{x},\vec{y} \in V : \vec{x}+\vec{y} = \vec{y}+\vec{x}$
3. $\exists\ \vec{0} \in V$ (συμβολισμός) $\forall\ \vec{x}\in V : \vec{x}+\vec{0} = \vec{x} = \vec{0}+\vec{x}$
4. $\forall\ \vec{x}\in V\ \exists\ -\vec{x} \in V$ (συμβολισμός) $: \vec{x}+(-\vec{x}) = \vec{0} = (-\vec{x})+\vec{x}$
5. $\forall\ \lambda\in\mathbb{K}\ ,\ \forall\ \vec{x},\vec{y}\in V : \lambda\cdot\vec{x}+\lambda\cdot\vec{y}$
6. $\forall\ \lambda,\mu\in\mathbb{K}\ ,\ \forall\vec{x}\in V : (\lambda+\mu)\cdot\vec{x} = \lambda\cdot\vec{x}+\mu\vec{x}$
7. $\forall\ \lambda,\mu\in\mathbb{K}\ ,\ \forall\vec{x}\in V : \lambda(\mu\cdot\vec{x}) = (\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{x}$
8. $\forall\ \vec{x}\in V : 1\cdot\vec{x} = \vec{x}$

Η εσωτερική πράξη $+$ θα καλείται πρόσθεση

η εξωτερική πράξη $\cdot$ θα καλείται βαθμωτός πολ/μός

Το διάνυσμα $\vec{0}$ του αξιώματος (3) καλείται μηδενικό διάνυσμα και, $\forall\ \vec{x}\in V$: το διάνυσμα $-\vec{x}$ στο αξίωμα (4) καλείται αντίθετο του $\vec{x}$.

Στοιχειώδεις Ιδιότητες

(1) Το μηδενικό διάνυσμα είναι μοναδικό

Έστω ότι υπάρχουν διανύσματα $\vec{O}_1, \vec{O}_2 \in V$: $\begin{cases} \vec{x}+\vec{O}_1 = \vec{O}_1+\vec{x} \quad \forall\ \vec{x}\in V & (*) \\ \vec{x}+\vec{O}_2 = \vec{x} = \vec{O}_2+\vec{x} & (**) \end{cases}$

Θ.δ.ο: $\vec{O}_1 = \vec{O}_2$. Πράγματι, θέτοντας στην σχέση $(*)$ $\vec{x}=\vec{O}_2$, θα έχουμε: $\vec{O}_2+\vec{O}_1 = \vec{O}_2 = \vec{O}_1+\vec{O}_2$

Στην σχέση $(**)$, θέτουμε $\vec{x}=\vec{O}_1$, και τότε: $\vec{O}_1+\vec{O}_2 = \vec{O}_1 = \vec{O}_2+\vec{O}_1$

$\Rightarrow \vec{O}_1 = \vec{O}$

(2) Το αντίθετο διάνυσμα ενός διανύσματος είναι μοναδικό

Έστω $\vec{x}\in V$ και έστω $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ δύο διανύσματα τα οποία ικανοποιούν

$$\begin{cases} \vec{x}+\vec{x_1}=\vec{O}=\vec{x_1}+\vec{x} \\ \vec{x}+\vec{x_2}=\vec{O}=\vec{x_2}+\vec{x} \end{cases} \quad \text{δ.ο. } \vec{x_1}=\vec{x_2}$$

ΔΕΥΤΕΡΗ ΣΛΕΣΗ

Στην πρώτη σχέση προσθέτουμε το $\vec{x_2}$: $\vec{x_2}(\vec{x}+\vec{x_1})=\vec{x_2}+\vec{O} \overset{\text{Αξίωμα (1)}}{\underset{\text{Αξίωμα (3)}}{\Rightarrow}} (\vec{x_2}+\vec{x})+\vec{x_1}=\vec{x_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{O}+\vec{x_1}=\vec{x_2} \xrightarrow[\text{Αξίωμα (3)}]{} \vec{x_1}=\vec{x_2}$

Έτσι από τώρα και στο εξής, θα γράφουμε $-\vec{x}$ για το αντίθετο του $\vec{x}$

(3) $\forall \vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V$: $\begin{cases} \vec{x}+\vec{y}=\vec{x}+\vec{z} \Rightarrow \vec{y}=\vec{z} \\ \vec{x}+\vec{y}=\vec{z}+\vec{y} \Rightarrow \vec{x}=\vec{z} \end{cases}$

$\vec{x}+\vec{y}=\vec{x}+\vec{z} \Rightarrow (-\vec{x})+(\vec{x}+\vec{y})=(-\vec{x})+(\vec{x}+\vec{z}) \overset{(1)}{\Rightarrow} ((-\vec{x})+\vec{x})+\vec{y}=((-\vec{x})+\vec{x})+\vec{z}$

$\overset{(4)}{\Rightarrow} \vec{O}+\vec{y}=\vec{O}+\vec{z} \overset{(3)}{\Rightarrow} \vec{y}=\vec{z}$

(4) $\forall \vec{x}\in V$: $0\cdot\vec{x}=\vec{O}$ και $\lambda\cdot\vec{O}=\vec{O}$

$\forall \lambda\in \mathbb{K}$

$0\cdot\vec{x}=(0+0)\cdot\vec{x} \overset{(6)}{=} 0\vec{x}+0\vec{x} \overset{(3)}{\Rightarrow} 0\cdot\vec{x}+\vec{O}=0\vec{x}+0\cdot\vec{x}$

Από την ιδιότητα (3): $0\cdot\vec{x}=\vec{O}$

Παρόμοια: $\lambda\cdot\vec{O}=\lambda(\vec{O}+\vec{O}) \overset{(5)}{=} \lambda\cdot\vec{O}+\lambda\cdot\vec{O} \overset{(3)}{\Longrightarrow} \lambda\cdot\vec{O}+\vec{O}=\lambda\cdot\vec{O}+\lambda\cdot\vec{O}$

Από την ιδιότητα (3): $\lambda\cdot\vec{O}=\vec{O}$

(5) $\forall \lambda\in \mathbb{K}$, $\forall \vec{x}\in V$: $\lambda\cdot\vec{x}=\vec{O} \Rightarrow$ είτε $\lambda=0$ είτε $\vec{x}=\vec{O}$

Υποθέτουμε ότι $\lambda\neq 0$. Τότε υπάρχει ο $\lambda^{-1}\in \mathbb{R}$ και τότε πολ/ντας βαθμωτά τη σχέση $\lambda\cdot\vec{x}=\vec{O}$ με το λ^{-1} θα έχουμε:

$$\lambda^{-1}(\lambda\cdot\vec{x})=\lambda^{-1}\cdot\vec{O} \xrightarrow[\text{ιδιότητα (4)}]{(7)} (\lambda^{-1}\lambda)\cdot\vec{x}=\vec{O} \Rightarrow 1\cdot\vec{x}=\vec{O} \overset{(8)}{\Rightarrow} \vec{x}=\vec{O}$$

(6) $\forall \vec{x}\in V$: $(-1)\cdot\vec{x}=-\vec{x}$

$$\vec{x}+(-1)\cdot\vec{x} \underset{(8)}{=} 1\cdot\vec{x}+(-1)\vec{x} \overset{(6)}{=\!=} (1+(-1))\vec{x}=0\cdot\vec{x} \xrightarrow[(4)]{\text{ιδιότητα}} \vec{O}$$

Παρόμοια $(-1)\vec{x}+\vec{x}=\vec{O}$ Από την μοναδικότητα του αντιθέτου διανύσματος (ιδιότητα (2)): $(-1)\cdot\vec{x}=-\vec{x}$

(7) $\forall \vec{x},\vec{y}\in V$: $-(\vec{x}+\vec{y})=-\vec{x}+(-\vec{y})$ και $-(-\vec{x})=\vec{x}$

$$-(\vec{x}+\vec{y}) \underset{\text{ιδιότητα}}{\overset{(6)}{=}} (-1)(\vec{x}+\vec{y}) \overset{(5)}{=} (-1)\vec{x}+(-1)\vec{y} \xrightarrow{\text{ιδιότητα (6)}} -\vec{x}+(-\vec{y})$$

$$-(-\vec{x}) \underset{(6)}{\overset{\text{ιδιότητα}}{=}} (-1)((-1)\cdot\vec{x}) \overset{(7)}{=} ((-1)(-1))\vec{x}=1\vec{x} \overset{(8)}{=} \vec{x}$$

Συμβολισμός $\forall \vec{x},\vec{y}\in V$: $\vec{x}-\vec{y} \underset{\text{op}}{=\!=} \vec{x}+(-\vec{y})$

⑧ $\forall \vec{x},\vec{y}\in V,\ \forall \lambda,\mu\in \mathbb{K}:$ $\begin{cases} (\lambda-\mu)\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}-\mu\cdot\vec{x} \\ \lambda(\vec{x}-\vec{y})=\lambda\vec{x}-\lambda\vec{y}\end{cases}$

$(\lambda-\mu)\vec{x}=(\lambda+(-\mu))\cdot\vec{x} \overset{⑥}{=} \lambda\cdot\vec{x}+(-\mu)\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}+((-1)\mu)\vec{x}) \overset{⑦}{=} \lambda\cdot\vec{x}+(-1)(\mu\cdot\vec{x}) \overset{⑥}{=}$
$\lambda\vec{x}-\mu\cdot\vec{x}$

Παρόμοια αποδεικνύεται η δεύτερη ισότητα [ΑΣΚΗΣΗ]

⑨ $\forall \lambda,\mu\in\mathbb{K},\ \forall \vec{x},\vec{y}\in V:$ $\begin{cases} \lambda\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{y} \text{ και } \lambda\neq 0 \Rightarrow \vec{x}=\vec{y} \\ \mu\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x} \text{ και } \vec{x}\neq 0 \Rightarrow \lambda=\mu \end{cases}$ [ΑΣΚΗΣΗ]

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

① Το σύνολο V όλων των διανυσμάτων του επιπέδου ή του χώρου εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης διανυσμάτων και την πράξη βαθμωτού πολ/μου πραγματικού αριθμού με διάνυσμα, είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$

② Στο σύνολο

$$\mathbb{K}^n=\underbrace{\mathbb{K}\times\mathbb{K}\ldots\times\mathbb{K}}_{n\text{-φορές}}=\{(\kappa_1,\kappa_2,\ldots \kappa_n)\mid \kappa_i\in\mathbb{K},\ 1\leq i\leq n\}$$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ Αν $\vec{x}=(\kappa_1,\kappa_2,\ldots\kappa_n)\in\mathbb{K}^n$ Τότε ορίζουμε:

$\vec{y}=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n)$

$\vec{x}+\vec{y}=(\kappa_1+\lambda_1,\ \kappa_2+\lambda_2,\ldots \kappa_n+\lambda_n)$

ΒΑΘΜΩΤΟΣ ΠΟΛ/ΣΜΟΣ: $\forall\ \vec{x}=(\kappa_1,\kappa_2,\ldots\kappa_n)\in\mathbb{K}^n,\ \forall\lambda\in\mathbb{K}:\ \lambda\cdot\vec{x}=(\lambda\cdot\kappa_1,\lambda\kappa_2,\ldots\lambda\kappa_n)$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ Η τριάδα $(\mathbb{K}^n,+,\cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$, με μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}=(0,0,\ldots,0)$ και με αντίθετο διάνυσμα του $\vec{x}=(\kappa_1,\kappa_2,\ldots)$ το $-\vec{x}=(-\kappa_1,-\kappa_2,\ldots,-\kappa_n)$

ΑΞΙΩΜΑ ⑦: $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\ \forall\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}^n:\ \lambda\cdot(\mu\cdot\vec{x})=(\lambda\cdot\mu)\vec{x}$

$\lambda(\mu\cdot\vec{x})=\lambda(\mu x_1,\mu x_2,\ldots\mu x_n)=(\lambda(\mu\cdot x_1),\lambda(\mu\cdot x_2),\ldots\lambda(\mu x_n))=((\lambda\cdot\mu)x_1,\ldots(\lambda\mu)x_n)=$
$(\lambda\cdot\mu)(x_1,x_2,\ldots x_n)=(\lambda\cdot\mu)\vec{x}$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύονται τα υπόλοιπα αξιώματα.

- Για $n=1$, έπεται ότι το $\mathbb{K}$ είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του εαυτού του

③ Για το σώμα $\mathbb{K}$, και για $m,n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ όλων των $m\times n$ πινάκων από το σώμα $\mathbb{K}$. Αν εφοδιάσουμε το $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ με την πράξη πρόσθεσης πινάκων και την πράξη βαθμωτού πολ/μου αριθμού από το $\mathbb{K}$ με $m\times n$ πίνακα απαιτούμε μια τριάδα $(M_{m\times n}(\mathbb{K}),+,\cdot)$ η οποία είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$ με μηδενικό διάνυσμα τον μηδενικό $m\times n$ πίνακα και με αντίθετο διάνυσμα το $A=(\alpha_{ij})\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ τον πίνακα: $-A=(-\alpha_{ij})$

ΑΞΙΩΜΑ ⑤ $\forall A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{K}), \forall \lambda\in\mathbb{K}: \lambda(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B$

$$\left.\begin{array}{l}[\lambda(A+B)]_{ij}=\lambda(\alpha_{ij}+\beta_{ij})=\lambda\alpha_{ij}+\lambda\beta_{ij} \\ [\lambda A+\lambda B]_{ij}=(\lambda A)_{ij}+(\lambda B)_{ij}=\lambda\alpha_{ij}+\lambda\beta_{ij}\end{array}\right\| \left.\begin{array}{l}\forall i=1,\dots m \\ \forall j=1,\dots n\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$$

Παρόμοια αποδεικνύονται και τα υπόλοιπα αξιώματα.

④ Θεωρούμε το σύνολο όλων των ακολουθιών αριθμών από το σώμα $\mathbb{K}$:

$$A(\mathbb{K})=\{(\alpha_n)_{n\geq 1} \mid \alpha_n\in\mathbb{K}, \forall n\geq 1\}$$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ: $\forall (\alpha_n)_{n\geq1}, (\beta_n)_{n\geq1}\in A(\mathbb{K}): (\alpha_n)_{n\geq1}+(\beta_n)_{n\geq1}=(\alpha_n+\beta_n)_{n\geq1}$

ΒΑΘΜΩΤΟΣ ΠΟΛ/ΜΟΣ: $\forall\lambda\in\mathbb{K}, \forall(\alpha_n)_{n\geq1}\in A(\mathbb{K}): \lambda(\alpha_n)_{n\geq1}=(\lambda\alpha_n)_{n\geq1}$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: Η τριάδα $(A(\mathbb{K}),+,\cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$ με μηδενικό διάνυσμα την μηδενική ακολουθία ($(\alpha_n)_{n\geq1}$ με $\alpha_n=0, \forall n\geq1$) / $(\alpha_n)_{n\geq1}$, την ακολουθία $(-\alpha_n)_{n\geq1}$

Αν $(\alpha_n)_{n\geq1}\in A(\mathbb{K})$ και $(x_n)_{n\geq1}\in A(\mathbb{K})$ $(\alpha_n)_{n\geq1}+(x_n)_{n\geq1}=(\alpha_n)_{n\geq1}=$ $(x_n)_{n\geq1}+(\alpha_n)_{n\geq1}\Rightarrow(\alpha_n+x_n)_{n\geq1}=(\alpha_n)_{n\geq1}\Rightarrow\forall n\geq1: \cancel{\alpha_n}+x_n=\cancel{\alpha_n}\Rightarrow x_n=0, \forall n\geq1$

ΑΞΙΩΜΑ ⑥ $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}, \forall(\alpha_n)_{n\geq1}\in A(\mathbb{K}): (\lambda+\mu)\cdot(\alpha_n)_{n\geq1}=\lambda(\alpha_n)_{n\geq1}+\mu(\alpha_n)_{n\geq1}$

$$(\lambda+\mu)\cdot(\alpha_n)_{n\geq1}=((\lambda+\mu)\cdot\alpha_n)_{n\geq1}=(\lambda\cdot\alpha_n+\mu\alpha_n)_{n\geq1}=(\lambda\cdot\alpha_n)_{n\geq1}+(\mu\alpha_n)_{n\geq1}=$$
$$=\lambda(\alpha_n)_{n\geq1}+\mu(\alpha_n)_{n\geq1}$$

ΠΑΡΟΜΟΙΑ ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΤΑ ΥΠΟΛΟΙΠΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ.

⑤ $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$

Τότε: $\mathbb{R}$: διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{Q}$

$\mathbb{C}$: διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$

10/11/2017

$\mathbb{C}$: διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{Q}$

Με πράξεις τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης αριθμών στο $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, και με βαθμωτό πολ/μο:

$\forall\ q \in \mathbb{Q}, \forall\ r \in \mathbb{R}$: $q \cdot r$ = συνήθης πολ/μός αριθμών

$\forall\ r \in \mathbb{R}, \forall\ z \in \mathbb{C}$ $r \cdot z$ = συνήθης πολ/μος αριθμών

$\forall\ q \in \mathbb{Q}, \forall\ z \in \mathbb{C}$ $q \cdot z$: συνήθης πολ/μος αριθμών

14/11/2017

Ο ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Αν $\mathbb{K}$ είναι ένα σώμα, τότε ένα πολυώνυμο υπεράνω του $\mathbb{K}$ είναι μια έκφραση της μορφής: $\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$, όπου $n \geq 0$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $0 \leq i \leq n$

Έστω $\mathbb{K}[x]$ το σύνολο όλων των πολυωνύμων υπεράνω του $\mathbb{K}$

Δύο πολυώνυμα $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$ καλούνται ίσα $\Leftrightarrow$

$Q(x) = \beta_0 + \beta_1 \cdot x + \ldots + \beta_m x^m$ θέτοντας $\kappa = \min\{n, m\}$

θα έχουμε $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 = \beta_1$, $\ldots$, $\alpha_\kappa = \beta_\kappa$ και $\alpha_\lambda = \beta_\lambda = 0$ $\forall\ \lambda > \kappa$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ Έστω $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$ $\in \mathbb{K}[x]$, τότε:

$Q(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_m x^m$

το άθροισμά τους $P(x) + Q(x)$ ορίζεται να είναι πολυώνυμο

$P(x) + Q(x) = (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)x + \ldots + (\alpha_\kappa + \beta_\kappa)x^\kappa + (\beta_{\kappa+1} x^{\kappa+1}) + \ldots + \beta_m x^m$

όπου θέσαμε $\kappa = n = \min\{n, m\}$

ΒΑΘΜΩΤΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ Έστω $\lambda \in \mathbb{K}$ και $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$ Τότε:

$\lambda P(x) = \lambda(\alpha_0) + (\lambda \alpha_1)x + \ldots + (\lambda \alpha_n) \cdot x^n$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ Η τριάδα $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$.

Το μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{K}[x]$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο δηλαδή το πολυώνυμο $P(x) = 0 + 0 \cdot x + \ldots + 0x^n$, το οποίο συμβολίζεται με 0

Το αντίθετο του πολυωνύμου $P(x)$ είναι το πολυώνυμο $-P(x)$ όπου:
Αν $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$, τότε: $-P(x) = -\alpha_0 - \alpha_1 x - \ldots - \alpha_n x^n$

Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΩΝ ΑΞΙΩΜΑΤΩΝ ΑΣΚΗΣΗ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω V: διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$
$F(S,V) = \{ f: S \to V \mid f: \text{απεικόνιση} \}$ S: τυχόν μη κενό σύνολο

ΠΡΟΣΘΕΣΗ: $\forall f, g \in F(S,V)$ Ορίζουμε απεικόνιση
$f+g: S \to V$, $(f+g)(s) = f(s) + g(s)$
πρόσθεση στον V

ΒΑΘΜΩΤΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ Έστω $\lambda \in \mathbb{K}$ και $f \in F(S,V)$ Ορίζουμε απεικόνιση $\lambda \cdot f: S \to V$, $(\lambda \cdot f)(s) = \lambda \cdot f(s)$
βαθμωτός πολ/μος του V

• $\forall f, g \in F(S,V)$: $f = g \Leftrightarrow f(s) = g(s) \ \forall s \in S$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ Η τριάδα $(F(S,V), +, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$

• Το μηδενικό διάνυσμα του $F(S,V)$ είναι η σταθερή συνάρτηση (απεικόνιση)
$O: S \to V$, $O(s) = \vec{0}$ μηδενικό διάνυσμα του V

• Το αντίθετο διάνυσμα της $f \in F(S,V)$ είναι η απεικόνιση $-f: S \to V$,
$(-f)(s) = -f(s)$ αντίθετο του $f(s) \in V$

Έστω ότι $h \in F(S,V)$: $f + h = f = h + f$, $\forall f \in F(S,V)$ Τότε:
$\forall s \in S$: $(f+h)(s) = f(s) \Rightarrow f(s) + h(s) = f(s) \ \forall s \in S \Rightarrow h(s) = 0 \ \forall s \in V$

Αντίστροφα $\forall f \in F(S,V)$: $f + O = f + O + f$

$\forall f, g \in F(S,V)$: $\lambda(f+g) = \lambda \cdot f + \lambda g$
$\forall \lambda \in \mathbb{K}$

$[\lambda(f+g)](s) = \lambda((f+g)(s)) = \lambda[f(s) + g(s)] = \lambda \cdot f(s) + \lambda g(s) =$
$= (\lambda \cdot f)(s) + (\lambda \cdot g)(s) = (\lambda \cdot f + \lambda g)(s) \ \forall s \in S$

Άρα $\lambda(f+g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$

1. $\mathbb{K}^n \ \forall n \geq 1$ Ιδιαίτερα $\mathbb{K}$ δ.χ υπεράνω του $\mathbb{K}$, και $\mathbb{K}: \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
2. $M_{m \times n}(\mathbb{K}) \ \forall n, m \geq 1$

$M_{m\times 1}(\mathbb{K}) \overset{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ}}{=\!=} \mathbb{K}^m = \left\{ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{matrix} \;\middle|\; x_i \in \mathbb{K} \right\}$ χωρος στηλων με m στοιχεια απο το $\mathbb{K}$

$M_{1\times n}(\mathbb{K}) \underset{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ}}{=} \mathbb{K}^n = \{ (x_1, x_2, \dots x_n) \mid x_i \in \mathbb{K} \}$ χωρος γραμμων με n στοιχεια

③ $A(\mathbb{K})$ χώρος ακολουθιών με στοιχειο απο το $\mathbb{K}$

④ $\mathbb{K}[s]$ χωρος πολυωνύμων με στοιχεια απο το $\mathbb{K}$

⑤ $F(S, V)$: χωρος απεικονίσεων: $S \to V$

S τυχόν σύνολο V δ.χ

ΥΠΟΧΩΡΟΙ

1 V: διανυσματικός χωρος υπεράνω του $\mathbb{K}$: $\boxed{V: \mathbb{K}\ \delta.\chi}$

Έστω V: $\mathbb{K}$ δ.χ

ΟΡΙΣΜΟΣ Ένα υποσύνολο $W \subseteq V$ καλείται υπόχωρος του $V \Leftrightarrow$

① $W \neq \emptyset$ ② $\forall \vec{x}, \vec{y} \in W: \vec{x} + \vec{y} \in W$ ③ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in W: \lambda \cdot \vec{x} \in W$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Το $W \subseteq V$ είναι υπόχωρος $\Leftrightarrow$ ①', ②, ③ οπου ①': $\vec{0} \in W$

"$\Leftarrow$" ΑΜΕΣΟ

"$\Rightarrow$" Επειδη $W \neq \emptyset \Rightarrow \exists \vec{z} \in W$ και τοτε απο ③: $0 \cdot \vec{z} \in W$ Όμως $0 \cdot \vec{z} = \vec{0}$

Αρα $\vec{0} \in W$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: Αν W είναι υπόχωρος του V τότε οι πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτου πολ/μου του V, ορίζουν πράξεις

πρόσθεσης $+: W \times W \to W$ και η τριάδα $(W, +, \cdot)$ είναι βαθμωτού πολ/μου $\cdot: \mathbb{K} \times W \to W$ διανυσματικός χώρος υπερανω του $\mathbb{K}$

Επειδή για τις πράξεις $+, \cdot$ του V ικανοποιούνται τα αξιώματα ①-⑧ εως $\mathbb{K}$-δ.χ και επειδη οι πράξεις $+, \cdot$ του V περιορίζονται σε πράξεις του W, έπεται ότι οι πράξεις $+, \cdot$ ικανοποιούν τα αξιώματα ①-⑧ για τον W

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ① Αν V: $\mathbb{K}$-δ.χ, τότε ο V περιέχει πάντα ως υπόχωρους τα υποσύνολα: V, $\{\vec{0}\}$: ο μηδενικός υπόχωρος του V

② (Σ) $\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \dots + \alpha_{2n}x_n = 0 \\ \alpha_{m1}x_1 + \dots \alpha_{mn}x_n = 0 \end{cases}$

Πίνακας συντελεστών $A = (\alpha_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$

$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ πίνακας σταθερών όρων του (Σ)

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ πίνακας αγνώστων

Τότε (Σ): $A\cdot X = 0$

Αν $\Lambda(\Sigma)$ είναι το σύνολο λύσεων του (Σ), τότε:

$$\Lambda(\Sigma) = \{y \in \mathbb{K}^n \mid A\,y = 0\} \subseteq \mathbb{K}^n : \mathbb{K}\text{-δ.χ}$$

- $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ λύση του $(\Sigma) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \Lambda(\Sigma)$ → το μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{K}^n$
- Εστω $y_1, y_2 \in \Lambda(\Sigma)$ Τότε: $A\cdot y_1 = 0$ και $A\cdot y_2 = 0$ και επομένως $A(y_1+y_2) = A\cdot y_1 + A\cdot y_2 = 0+0=0 \Rightarrow y_1+y_2 \in \Lambda(\Sigma)$
- Εστω $\lambda \in \mathbb{K}$ και $y \in \Lambda(\Sigma)$ Τότε: $A\cdot y = 0$ και $A(\lambda\cdot y) = \lambda\cdot A\cdot y = \lambda\cdot 0 = 0$ $\Rightarrow \lambda\cdot y \in \Lambda(\Sigma)$

Αρα το $\Lambda(\Sigma)$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{K}^n$:

Το σύνολο λύσεων ενός ομογενούς συστήματος m εξισώσεων με n αγνώστους είναι υπόχωρος $\mathbb{K}$-δ.χ $\mathbb{K}^n$

Εστω V: $\mathbb{K}$-δ.χ και έστω $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots \vec{x_n} \in V$ θεωρούμε το εξής υποσύνολο του V:

ΟΡΙΣΜΟΣ

$$\langle \vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots \vec{x_n} \rangle = \{\lambda_1\vec{x_1} + \lambda_2\vec{x_2} + \dots + \lambda_n\vec{x_n} \in V \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \in \mathbb{K}\}$$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ Το υποσύνολο $\langle \vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots \vec{x_n} \rangle$ είναι υπόχωρος του V ο ο οποίος καλείται ο υπόχωρος του V ο οποίος παράγεται απο τα $\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}$

- για $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$: $0\vec{x_1} + 0\cdot\vec{x_2} + \dots + 0\cdot\vec{x_n} = \vec{0} \in \langle \vec{x_1} \dots \vec{x_n} \rangle$
- Αν $\lambda_1\cdot\vec{x_1} + \dots + \lambda_n\vec{x_n} \in \langle \vec{x_1} \dots \vec{x_n} \rangle$ Τότε:
  $\mu_1\vec{x_1} + \dots + \mu_n\vec{x_n} \in \langle \vec{x_1} \dots \vec{x_n} \rangle$

14/11/2017

$\lambda_1\vec{x_1}+\ldots+\lambda_n\vec{x_n}+\mu_1\vec{x_1}+\ldots+\mu_n\vec{x_n}=(\lambda_1\vec{x_1}+\mu_1\vec{x_1})+\ldots+(\lambda_n\vec{x_n}+\mu_n\vec{x_n})=$
$(\lambda_1+\mu_1)\vec{x_1}+\ldots+(\lambda_n+\mu_n)\vec{x_n}\in\langle\vec{x_1},\ldots\vec{x_n}\rangle$

- Αν $\kappa\in\mathbb{K}$ $\lambda_1\vec{x_1}+\ldots+\lambda_n\vec{x_n}\in\langle\vec{x_1},\ldots\vec{x_n}\rangle$, τότε $\kappa(\lambda_1\cdot\vec{x_1}+\ldots+\lambda_n\vec{x_n})=$
$=\kappa(\lambda_1\vec{x_1})+\ldots+\kappa(\lambda_n\vec{x_n})=(\kappa\lambda_1)\vec{x_1}+\ldots(\kappa\lambda_n)\vec{x_n}\in\langle\vec{x_1},\ldots\vec{x_n}\rangle$

21/11/2017

Εστω E: $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.
Ενα υποσύνολο $V\subseteq E$ καλείται υπόχωρος του E ει
α) $\vec{0}\in V$, β) $\forall\vec{x},\vec{y}\in V$: $\vec{x}+\vec{y}\in V$ γ) $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\forall\vec{x}\in V$: $\lambda\cdot\vec{x}\in V$
και τότε V είναι $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος με τις πράξεις του E.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Αν $\vec{x_1},\vec{x_2},\ldots,\vec{x_n}\in E$, τότε:
$\langle\vec{x_1},\vec{x_2},\ldots,\vec{x_n}\rangle=\{\lambda_1\vec{x_1}+\lambda_2\vec{x_2}+\ldots+\lambda_n\vec{x_n}\in E\mid\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n\in\mathbb{K}\}$
είναι ένας υπόχωρος του E: ο υπόχωρος του E ο οποίος παράγεται απο το $\vec{x_1},\ldots\vec{x_n}$:

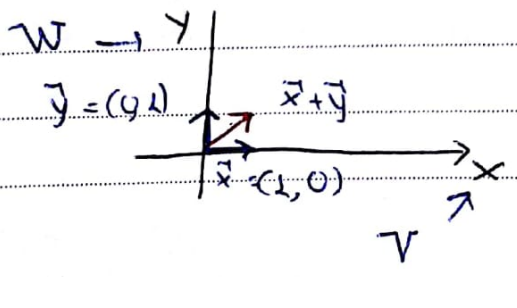
Εστω V, W: υπόχωροι του E

ΛΗΜΜΑ: Η τομή $V\cap W$ είναι υπόχωρος του E

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
- V, W: υπόχωροι $\Rightarrow$ $\vec{0}\in V$ και $\vec{0}\in W\Rightarrow\vec{0}\in V\cap W$
- $\forall\vec{x},\vec{y}\in V\cap W\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\vec{x},\vec{y}\in V\\ \text{και}\\ \vec{x},\vec{y}\in W\end{array}\right.\xRightarrow[W\text{ υπόχωρος}]{V\text{ υπόχωρος}}\left\{\begin{array}{l}\vec{x}+\vec{y}\in V\\ \text{και}\\ \vec{x}+\vec{y}\in W\end{array}\right.$
$\Rightarrow\vec{x}+\vec{y}\in V\cap W$
- $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\forall\vec{x}\in V\cap W\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\vec{x}\in V\\ \text{και}\\ \vec{x}\in W\end{array}\right.\xRightarrow[\text{υπόχωροι}]{V,W}\left\{\begin{array}{l}\lambda\cdot\vec{x}\in V\\ \text{και}\\ \lambda\cdot\vec{x}\in W\end{array}\right.\Rightarrow\lambda\cdot\vec{x}\in V\cap W$

ΑΣΚΗΣΗ: Αν $V_1,V_2,\ldots V_n$: υπόχωροι του E τότε $\bigcap_{i=1}^{n}V_i$: υπόχωρος του E

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $E=\mathbb{R}^2=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$
$V=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2\mid y=0\}$: υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ ο οποίος παράγεται απο το $(1,0)$
$W=\{(0,y)\in\mathbb{R}^2\mid x=0\}$: υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ ο οποίος παράγεται απο το $(0,1)$



Εστω $\vec{x}=(1,0)\in V\Rightarrow\vec{x},\vec{y}\ V\cup W$
$\vec{y}=(0,1)\in W$ $\quad\vec{x}+\vec{y}=(1,0)+(0,1)=(1,1)\notin V\cup W$
Αρα η ένωση $V\cup W$ δεν είναι υπόχωρος

ΘΕΩΡΟΥΜΕ ΤΟ ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ

$$V+W=\left\{\vec{x}+\vec{y}\in E \;\middle|\; \begin{matrix}\vec{x}\in V\\ \vec{y}\in W\end{matrix}\right\}$$

ΛΗΜΜΑ: Το σύνολο $V+W$ είναι ένας υπόχωρος του E, ο οποίος καλείται το άθροισμα των υποχώρων V και W, και είναι ο μικρότερος υπόχωρος του E ο οποίος περιέχει τους V και W.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ • $\vec{0}=\vec{0}+\vec{0}$, όπου $\vec{0}\in V$ διότι V υπόχωρος. Άρα $\vec{0}\in V+W$

$\vec{0}\in W$ διότι W υπόχωρος

• Έστω ότι $\vec{z_1},\vec{z_2}\in V+W \Rightarrow$

$\vec{z_1}=\vec{x_1}+\vec{y_1}$, $\vec{z_2}=\vec{x_2}+\vec{y_2}$ όπου $\vec{x_1},\vec{x_2}\in V$, $\vec{y_1},\vec{y_2}\in W$

Τότε $\vec{z_1}+\vec{z_2}=\vec{x_1}+\vec{y_1}+\vec{x_2}+\vec{y_2}=(\vec{x_1}+\vec{x_2})+(\vec{y_1}+\vec{y_2})\in V+W$, διότι

$\vec{x_1},\vec{x_2}\in V$ και V: υπόχωρος $\Rightarrow \vec{x_1}+\vec{x_2}\in V$

$\vec{y_1},\vec{y_2}\in W$ και W: υπόχωρος $\Rightarrow \vec{y_1}+\vec{y_2}\in W$

Έστω $\lambda\in\mathbb{K}$, $\vec{z}\in V+W$ Τότε $\vec{z}=\vec{x}+\vec{y}$, όπου $\vec{x}\in V$, $\vec{y}\in W$ και:

$\lambda\cdot\vec{z}=\lambda(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\cdot\vec{x}+\lambda\cdot\vec{y}\in V+W$, διότι:

$\vec{x}\in V$ και V: υπόχωρος $\Rightarrow \lambda\cdot\vec{x}\in V$

$\vec{y}\in W$ και W: υπόχωρος $\Rightarrow \lambda\cdot\vec{y}\in W$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Επειδή $\forall\, \vec{x}\in V$: $\vec{x}=\underset{\in V}{\vec{x}}+\underset{\in W}{\vec{0}}\in V+W$ Άρα $V\subseteq V+W$

Παρόμοια: $W\subseteq V+W$ Έστω X ένας υπόχωρος του E έτσι ώστε: $V\subseteq X$ και $W\subseteq X$. Θδο $V+W\subseteq X$

Έστω $z\in V+W$. Τότε $\vec{z}=\vec{x}+\vec{y}$, όπου $\vec{x}\in V$, $y\in W$. Επειδή $V,W\subseteq X$ έπεται ότι: $\vec{x},\vec{y}\in X$. Επειδή υπόχωρος $\Rightarrow \vec{z}=\vec{x}+\vec{y}\in X$: Άρα: $V+W\subseteq X$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω ο $\mathbb{K}$-δ.χ $M_n(\mathbb{K})$

$$A_n(\mathbb{K})=\{A\in M_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA=-A\}$$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: Τα υποσύνολα $A_n(\mathbb{K})$ και $\Sigma_n(\mathbb{K})$ είναι υπόχωροι του $M_n(\mathbb{K})$ και $A_n(\mathbb{K})+\Sigma_n(\mathbb{K})=M_n(\mathbb{K})$

$$A_n(\mathbb{K})\cap\Sigma_n(\mathbb{K})=\{0\}$$

① Ο μηδενικός $n \times n$ πίνακας είναι συμμετρικός πίνακας $\Rightarrow O \in \Sigma_n(\mathbb{K})$

• $\forall A, B \in \Sigma_n(\mathbb{K})$: ${}^tA = A$ και ${}^tB = B$. Τότε ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = A+B$

$\Rightarrow A+B \in \Sigma_n(\mathbb{K})$

• $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $\forall A \in \Sigma_n(\mathbb{K})$

Άρα ο $\Sigma_n(\mathbb{K})$ είναι υπόχωρος του $M_n(\mathbb{K})$

② Παρόμοια ο $A_n(\mathbb{K})$ είναι υπόχωρος του $M_n(\mathbb{K})$

③ Έστω $A \in A_n(\mathbb{K}) \cap \Sigma_n(\mathbb{K}) \Rightarrow {}^tA = A$ και ${}^tA = -A \Rightarrow A = -A \Rightarrow$

$2A = O \Rightarrow A = O$ Άρα $A_n(\mathbb{K}) \cap \Sigma_n(\mathbb{K}) = \{O\}$

④ Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$ θεωρούμε τους πίνακες:

$$\left(\begin{array}{l} {}^t(A+{}^tA) = {}^tA + {}^t({}^tA) = {}^tA + A = A + {}^tA \Rightarrow A + {}^tA \in \Sigma_n(\mathbb{K}) \\ {}^t(A-{}^tA) = {}^tA - {}^t({}^tA) = {}^tA - A = -(A-{}^tA) \Rightarrow A - {}^tA \in A_n(\mathbb{K}) \end{array} \right)$$

$\frac{A+{}^tA}{2} \in \Sigma_n(\mathbb{K})$

Τότε: $A = \underbrace{\frac{A+{}^tA}{2}}_{\in \Sigma_n(\mathbb{K})} + \underbrace{\frac{A-{}^tA}{2}}_{\in A_n(\mathbb{K})}$

$\frac{A-{}^tA}{2} \in A_n(\mathbb{K})$

Άρα $M_n(\mathbb{K}) = \Sigma_n(\mathbb{K}) + A_n(\mathbb{K})$

ΛΗΜΜΑ: Αν $V_1, V_2, \ldots V_n$: υπόχωροι του E τότε το σύνολο $V_1 + V_2 + \ldots + V_n =$
$\{ \vec{x_1} + \vec{x_2} + \ldots + \vec{x_n} \in E \mid x_i \in V_i, \ 1 \leq i \leq n \}$
είναι υπόχωρος του E, καλείται το άθροισμα των $V_1, V_2, \ldots, V_n$ και είναι ο μικρότερος υπόχωρος του E ο οποίος περιέχει τους $V_1, V_2, \ldots, V_n$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Έστω ο $\mathbb{K}$-δ.χ. $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}, \ 1 \leq i \leq n\}$

Θέτουμε: $\vec{e_1}(1, 0, \ldots, 0)$, $\vec{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$ $\vec{e_n} = (0, 0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{K}^n$

και $V_i = \langle \vec{e_i} \rangle = \{ \lambda \vec{e_i} \in \mathbb{K}^n \mid \lambda \in \mathbb{K} \} = \{ \lambda \cdot (0, \ldots 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-οστή} \\ \text{θέση}}}{1}, 0, \ldots 0) \in \mathbb{K}^n \mid \lambda \in$

$= \{ (0, 0, \ldots, 0, \lambda, 0, \ldots 0) \in \mathbb{K}^n \mid \lambda \in \mathbb{K} \}$

Τότε $\mathbb{K}^n = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$ Πράγματι: $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$

$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots x_n)$

$= x_1(1, 0, \ldots 0) + x_2(0, 1, \ldots 0) + \ldots + x_n(0, 0, \ldots, 1) \in V_1 + V_2 + \ldots + V_n$

Άρα $\mathbb{K}^n = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$

ΑΣΚΗΣΗ $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot y \cdot z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ΝΔΟ εαν είναι υπόχωρος

δεν είναι υπόχωρος

γιατί $(1,0,1), (0,1,0) \in V_1$ και $(1,0,1)+(0,1,0) = (1,1,1) \notin V_1$

$V_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι υπόχωρος;

δεν είναι υπόχωρος γιατί $(1,1) \in V_2$ και $2(1,1) = (2,2) \notin V_2$, διότι $2 \neq 2^2$

$V_3 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^2 = A\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$ είναι υπόχωρος;

δεν είναι υπόχωρος

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in V_3$, διότι $I_2^2 = I_2$ και $(3I_2)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \neq 3I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0 \text{ και } z \leq 0\}$

δεν είναι υπόχωρος

$(1, 0, -1) \in V_4$ και $(-1)(1, 0, -1) = (-1, 0, 1) \notin V_4$

$V_5 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 1\} \subseteq F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

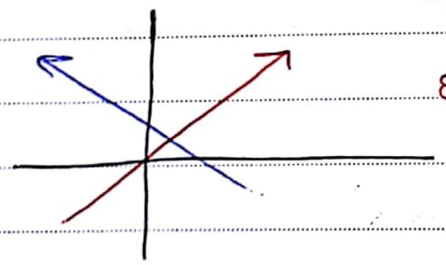
$0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $0(x) = 0$ και $0 \notin V_5$

$V_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x|+|y|+|z| \geq 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ δεν είναι υπόχωρος

$(0,0,0) \notin V_6$

$V_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

είναι υπόχωρος εάν το $\gamma = 0$ και δεν είναι υπόχωρος εάν το $\gamma \neq 0$



είναι υπόχωροι αμα περνάνε απο το (0,0) αλλιώς δεν

δεν είναι υπόχωροι

ΟΡΙΣΜΟΣ Αν $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}$ είναι διανύσματα ενος $\mathbb{K}$ - δ.χ. Ε, τότε καθε διάνυσμα της μορφής $\lambda_1 \vec{x_1} + \lambda_2 \vec{x_2} + \dots + \lambda_n \vec{x_n}$ θα καλείται γραμμικός συνδυασμός των $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots \vec{x_n}$

24/11/2017

E= διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$

Κάθε διάνυσμα του E της μορφής $\lambda_1\vec{x_1}+\dots+\lambda_n\vec{x_n}$ καλείται γραμμικός συνδυασμός των $\vec{x_1},\dots\vec{x_n}$. Έτσι ο υπόχωρος $\langle\vec{x_1},\dots,\vec{x_n}\rangle$ ο οποίος παράγεται από τα $\vec{x_1},\dots\vec{x_n}$ αποτελείται από όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των $\vec{x_1},\dots x_n$

ΒΑΣΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ: Πότε ένα διάνυσμα $\vec{x}\in E$ ανήκει στον υπόχωρο $\langle\vec{x_1},\dots\vec{x_n}\rangle$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1) $\vec{x_1}=(0,1)$, $\vec{x_2}=(-1,2)\in\mathbb{R}^2$ και $\vec{x}=(2,3)\in\mathbb{R}^2$. Πότε $\vec{x}\in\langle\vec{x_1},\vec{x_2}\rangle$

Έστω ότι $\vec{x}\in\langle\vec{x_1},\vec{x_2}\rangle\Rightarrow\exists\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}:\vec{x}=\lambda_1\vec{x_1}+\lambda_2\vec{x_2}\Rightarrow(2,3)=\lambda_1(0,1)+\lambda_2(-1,2)$

$$\Rightarrow(2,3)=(0,\lambda_1)+(-\lambda_2,2\lambda_2)=(-\lambda_2,\lambda_1+2\lambda_2)\Rightarrow(\Sigma)\begin{cases}-\lambda_2=2\\ \lambda_1+2\lambda_2=3\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{l}\lambda_1=7\\ \lambda_2=-2\end{array}$$

και τότε: $\vec{x}=7\vec{x_1}-2\vec{x_2}\in\langle\vec{x_1},\vec{x_2}\rangle$

2) $\vec{x_1}=(1,2,-1)$, $\vec{x_2}=(6,4,2)$, $\vec{x}=(9,2,7)\in\mathbb{R}^3$. Πότε $\vec{x}\in\langle\vec{x_1},\vec{x_2}\rangle$;

Έστω ότι $\vec{x}\in\langle\vec{x_1},\vec{x_2}\rangle\Rightarrow\exists\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}:\vec{x}=\lambda_1\vec{x_1}+\lambda_2\vec{x_2}\Rightarrow$

$(9,2,7)=\lambda_1(1,2,-1)+\lambda_2(6,4,2)\Rightarrow(9,2,7)=(\lambda_1+6\lambda_2,2\lambda_1+4\lambda_2,-\lambda_1+2\lambda_2)$

$$\Rightarrow(\Sigma)=\begin{cases}\lambda_1+6\lambda_2=9\\ 2\lambda_1+4\lambda_2=2\\ -\lambda_1+2\lambda_2=7\end{cases}\overset{\dots}{\Longrightarrow}\begin{array}{l}\lambda_1=-3\\ \lambda_2=2\end{array}$$

Άρα $\vec{x}=-3\vec{x_1}+2\vec{x_2}\in\langle\vec{x_1},\vec{x_2}\rangle$

3) $\vec{x_1}=(0,1,1)$, $\vec{x_2}=(0,0,1)$, $\vec{x}=(1,0,0)\in\mathbb{R}^3$ Πότε $\vec{x}\in\langle\vec{x_1},\vec{x_2}\rangle$;

Έστω ότι $\vec{x}\in\langle\vec{x_1},\vec{x_2}\rangle\Rightarrow\exists\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}:\vec{x}=\lambda_1\vec{x_1}+\lambda_2\vec{x_2}\Rightarrow$

$\lambda_1(0,1,1)+\lambda_2(0,0,1)\Rightarrow(1,0,0)=(0,\lambda_1,\lambda_1+\lambda_2)\Rightarrow 1=0$ άτοπο

Άρα το $\vec{x}\notin\langle x_1,x_2\rangle$

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Έστω $\vec{x_1},\vec{x_2},\dots\vec{x_n}\in E$

1) $\forall\ i=1,\dots,n$, $\forall\ j=1,\dots,n$: $\vec{x_i}\longmapsto\vec{x_i}+\lambda\vec{x_j}$, όπου $\lambda\in\mathbb{K}$

2) -//- -//- : $x_i\longleftrightarrow x_j$

3) -//- : $\vec{x_i}\longmapsto\lambda\vec{x_i}$ $(\lambda\in\mathbb{K},\lambda\neq0)$

ΠΡΟΤΑΣΗ Ο υπόχωρος $<\vec{x_1},\dots \vec{x_n}>$ δεν αλλάζει μετά την εκτέλεση πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεων στα $\vec{x_1},\dots,\vec{x_n}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ① Εστω $\vec{x_i} \mapsto \vec{x_i}+\lambda\vec{x_j} := \vec{x_i}'$ ΘΔΟ: $<\vec{x_1},x_i\dots\vec{x_n}>$
$<\vec{x_1},\dots\vec{x_i},\dots\vec{x_n}>$

Έστω $\vec{x}\in<\vec{x_1},\dots\vec{x_i}',\dots\vec{x_n}> \Rightarrow \exists \lambda_1,\dots\lambda_n\in\mathbb{K}: \vec{x}=\lambda_1\vec{x_1}+\dots+\lambda_i\vec{x_i}'+\dots+\lambda_n\vec{x_n}$
$\Rightarrow \vec{x}=\lambda_1\vec{x_1}+\dots+\lambda_i(x_i+\lambda x_j)+\dots+\lambda_n\vec{x_n}=\lambda_1\vec{x_1}+\dots+\lambda_i(\vec{x_i}+\lambda\vec{x_j})+\dots+\lambda_n\vec{x_n}=$
$=\lambda_1\vec{x_1}+\dots+\lambda_i\vec{x_i}+\dots+\dots+(\lambda_i\lambda+\lambda_j)x_j+\dots+\lambda_n\vec{x_n}\in<\vec{x_1},\vec{x_i},\dots\vec{x_n}>$

Άρα: $<\vec{x_1},\dots\vec{x_i}',\dots\vec{x_n}>\subseteq<\vec{x_1},\dots,\vec{x_i},\dots\vec{x_n}>$ (*)

Εστω $\vec{x}\in<\vec{x_1},\dots\vec{x_i},\dots\vec{x_n}> \Rightarrow \exists\lambda_1,\dots\lambda_n\in\mathbb{K}: \vec{x}=\lambda_1\vec{x_1}+\dots+\lambda_i\vec{x_i}+\dots+\lambda_n\vec{x_n}$
$=\lambda_1\vec{x_1}+\dots+\lambda_i\vec{x_i}+\lambda\lambda_i\vec{x_i}+\dots+\lambda_j\vec{x_j}-\lambda_i\lambda\vec{x_j}+\dots+\lambda_n\vec{x_n}=\lambda_1\vec{x_1}+\dots+\lambda_i(x_i+\lambda\vec{x_j})+\dots$
$+(\lambda_j-\lambda_i\lambda)\vec{x_j}+\dots+\lambda_n\vec{x_n}=\lambda_1\vec{x_1}+\dots+\lambda_i\vec{x_i}'+\dots+(\lambda_j-\lambda_i\lambda)\vec{x_j}+\dots+\lambda_n\vec{x_n}\in$
$<\vec{x_1},\dots\vec{x_i}'\dots x_n>$

Άρα: $<\vec{x_1},\dots\vec{x_i},\dots\vec{x_n}>\subseteq<\vec{x_1}\dots\vec{x_i}'\dots\vec{x_n}>$ (**)

Απο τις (*) (**) προκύπτει ότι $<\vec{x_1},\dots\vec{x_i},\dots\vec{x_n}>=<\vec{x_1},\dots\vec{x_i}',\dots\vec{x_n}>$

② $\vec{x}\in<\vec{x_1},\dots\vec{x_i},\dots\vec{x_j}\dots\vec{x_n}> \Rightarrow \exists\lambda_1\dots\lambda_n\in\mathbb{K}: \vec{x}=\lambda_1\vec{x_1}+\dots+\lambda_i\vec{x_i}+\dots+$
$\lambda_j\vec{x_j}+\dots+\lambda_n\vec{x_n}=\lambda_1\vec{x_1}+\dots+\lambda_j\vec{x_j}+\dots+\lambda_i\vec{x_i}+\dots+\lambda_n\vec{x_n}\in<\vec{x_1},\vec{x_j}\dots x_i\,\vec{x}>$

Άρα $<\vec{x_1},\dots\vec{x_j},\dots\vec{x_i},\dots\vec{x_n}>\subseteq \vec{x_1},\vec{x_i},\vec{x_j}\dots\vec{x_n}>$

Παρόμοια $<\vec{x_1}\dots\vec{x_j}\dots\vec{x_i}\dots\vec{x_n}>\subseteq<\vec{x_1},\dots\vec{x_i},\dots\vec{x_j}\dots\vec{x_n}>$

③ Εστω ότι $\vec{x}\in<\vec{x_1},\vec{x_i}',\dots\vec{x_n}>$, όπου $\vec{x_i}'=\lambda\vec{x_i}$, $\lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda\neq0$ Τότε
$\exists\lambda_1,\dots\lambda_n\in\mathbb{K}: \vec{x}=\lambda_1\vec{x_1}+\dots+\lambda_i\vec{x_i}'+\dots+\lambda_n\vec{x_n}=\lambda_1\vec{x_1}+\dots+\lambda_i\lambda\vec{x_i}+\dots+\lambda_n\vec{x_n}$
$\in<\vec{x_1},\dots,\vec{x_i},\dots\vec{x_n}>$ Άρα: $<\vec{x_1},\dots\vec{x_i}',\dots\vec{x_n}>\subseteq<\vec{x_1},\dots\vec{x_i},\dots\vec{x_n}>$ (*)

Εστω $\vec{x}\in<\vec{x_1},\dots\vec{x_i},\dots\vec{x_n}> \Rightarrow \exists\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}: \vec{x}=\lambda_1\vec{x_1}+\dots+\lambda_i\vec{x_i}+\dots+\lambda_n\vec{x_n}$
$=\lambda_1\vec{x_1}+\dots+(\lambda_i\lambda^{-1})(\lambda\vec{x_i})+\dots+\lambda_n\vec{x_n}=\lambda_1\vec{x_1}+\dots+(\lambda_i\lambda^{-1})\vec{x_i}'+\dots+\lambda_n\vec{x_n}$
$\in<\vec{x_1},\dots\vec{x_i}',\dots,\vec{x_n}>$

Άρα $<\vec{x_1},\dots\vec{x_i},\dots\vec{x_n}>\subseteq<\vec{x_1},\dots\vec{x_i}',\dots\vec{x_n}>$ (**) Απο τις (*) (**) $\Rightarrow$
$<\vec{x_1},\dots\vec{x_i},\dots\vec{x_n}>=<\vec{x_1},\dots\vec{x_i}',\dots\vec{x_n}>$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Αν E $\mathbb{K}$-δ.χ μπορούμε να βρούμε διανύσματα $\vec{x_1},\dots\vec{x_n}$
$E=<\vec{x_1},\dots\vec{x_n}>$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Γενικά όχι, όμως για κάθε $\mathbb{K}$ δ.χ E, υπάρχει ένα $S\subseteq E$ τ.ω $<S>=$

24/11/2017

όπου $<S> = \left\{ \lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_n \vec{x_n} \in E \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 \dots x_n \in S \\ \lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{K} \end{matrix} \text{ και } n \in \mathbb{N} \right\}$

είναι ο υπόχωρος ο οποίος παράγεται από το $S \subseteq E$. Το υποσύνολο $<S>$ είναι πράγματι υπόχωρος του E: [ΑΣΚΗΣΗ]

ΟΡΙΣΜΟΣ Ένα σύνολο διανυσμάτων $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n} \in E$ καλείται σύνολο γεννητόρων του $E \Leftrightarrow E = <\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}>$ και τότε τα διανύσματα $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}$ καλούνται γεννήτορες του E, και το σύνολο $\{\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}\}$ παράγει τον E. Ο $\mathbb{K}$-δ.χ E καλείται πεπερασμένα παραγόμενος $\Leftrightarrow$ ο E έχει ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων: $\exists\, \vec{x_1}, \dots, \vec{x_n} \in E : E = <\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}>$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Στον $\mathbb{K}$δ.χ $\mathbb{K}^n$, θεωρούμε τα διανύσματα: $\vec{e_1} = (1,0,0,\dots,0)$, $\vec{e_2} = (0,1,0,\dots,0)$ .... $\vec{e_n} = (0,0,\dots,0,1)$

Τότε το σύνολο $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$ παράγει τον $\mathbb{K}^n$: $\mathbb{K}^n = <\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}>$

$= (x_1,0,0,\dots,0) + (0,x_2,0,\dots,0) + \dots + (0,\dots,0,x_n) =$

$= x_1(1,0,0,\dots,0) + x_2(0,1,0,\dots,0) + \dots + x_n(0,\dots,0,1) = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \dots + x_n\vec{e_n}$

$\in <\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}>$ Άρα $\mathbb{K}^n = <\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}>$

2 Στον $\mathbb{K}$-δ.χ $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, έστω $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dots + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dots + \alpha_{1n}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_{m1}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_{mn}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ορίζουμε $m\times n$ πίνακες

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-γραμμή}$$

j-στήλη

Τότε

$A = \alpha_{11}E_{11} + \ldots \alpha_{1n}E_{1n}$
$+ \alpha_{21}E_{21} + \ldots + \alpha_{2n}E_{2n}$
$\vdots$
$+ \alpha_{m1}E_{m1} + \ldots + \alpha_{mn}E_{mn}$

Άρα $M_{m\times n}(\mathbb{K}) = \langle E_{ij}\ {}^{i=1\ldots m}_{j=1\ldots n} \rangle$ (είναι πεπερασμένα παραγόμενος)

③ $\mathbb{K}[x] = \{ \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n \mid \alpha_i \in \mathbb{K} : 0 \le i \le n,\ n \in \mathbb{N}_0 \}$

Ο $\mathbb{K}[x]$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενος. Έστω ότι ο $\mathbb{K}[x]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος $\Rightarrow P_1(x), \ldots, P_n(x) \in \mathbb{K}(x)$:
$\mathbb{K}[x] = \langle P_1(x), \ldots P_n(x) \rangle \Rightarrow \forall P(x) \in \mathbb{K}[x] : \exists \lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{K}$:
$p(x) = \lambda_1 P_1(x) + \ldots + \lambda_n P_n(x)$ Έστω $\deg P_1(x) = \kappa$ τότε:
$\deg P(x) \le \max\{\kappa_1, \kappa_2, \ldots \kappa_n\}$ $\deg P_1(x) = \kappa_1$ τότε:
$\deg P(x) \le \max\{\kappa_1, \kappa_2, \ldots \kappa_n\}$ $\deg P_n(x) = \kappa_n$
Αν επιλέξουμε $P(x) = x^m$ όπου $m > \max\{\kappa_1, \ldots \kappa_n\}$ τότε $P(x) \ne \lambda_1 P_1(x) + \ldots + \lambda_n P_n(x)$ Άρα δεν υπάρχει πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων του $\mathbb{K}[x]$

④ $\forall n \ge 1 : \mathbb{K}_n[x] = \{ P(x) \in \mathbb{K}[x] \mid \deg P(x) \le n \} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{K}[x]$

- $0 \in \mathbb{K}_n[x]$

αν $P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{K}_n[x]$, τότε $\deg P_1(x) \le n$ $\deg P_2(x) \le n \Rightarrow$
$\deg(P_1(x) + P_2(x)) \le \max\{\deg P_1(x), \deg P_2(x)\} \le n \Rightarrow P_1(x) + P_2(x) \in \mathbb{K}_n[x]$
αν $P_1(x) + P_2(x) = 0 \in \mathbb{K}_n[x]$

- αν $P(x) \in \mathbb{K}_n[x]$ και $\lambda \in \mathbb{K}$, τότε $\lambda P(x) \in \mathbb{K}_n[x]$ διότι:

- αν $\lambda = 0 \Rightarrow \lambda p(x) = 0 \in K_n[x]$
- αν $\lambda \ne 0$ και $p(x) = 0 \Rightarrow \lambda p(x) = 0 \in \mathbb{K}_n[x]$

-αν $\lambda \neq 0$ και $P(x) \neq 0 \Rightarrow \deg(\lambda P(x)) = \deg P(x) \leq n \Rightarrow \lambda P(x) \in \mathbb{K}_n[x]$

Αρα $\mathbb{K}_n[x]$: υπόχωρος του $\mathbb{K}[x]$

$\forall\ P(x) = \alpha_0 1 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n \in \mathbb{K}[x]$ έχουμε τα πολυώνυμα $1, x, x^2, \ldots x^n$ τα οποία ανήκουν στο $\mathbb{K}_n[x]$ και το $P(x)$ είναι γραμμικός συνδυασμός αυτών. Αρα $\mathbb{K}_n[x] = \langle 1, x, x^2, \ldots x^n \rangle$ πεπερασμένα παραγομενος

$\mathbb{K}[x] = \langle 1, x, x^2, \ldots x^n, \ldots \rangle \Rightarrow S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\} \subseteq \mathbb{K}[x]$

είναι σύνολο γεννητόρων

$P(x) = 3 \cdot 1 - 5x + x^7$

ΟΡΙΣΜΟΣ Ενα σύνολο διανυσμάτων $X = \{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \ldots \vec{x_n}\} \subseteq E$ καλείται γραμμικά εξαρτημένο $\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in \mathbb{K}$ όχι όλοι μηδεν έτσι ώστε: $\lambda_1 \vec{x_1} + \lambda_2 \vec{x_2} + \ldots + \lambda_n \vec{x_n} = 0$ η παραπάνω σχέση θα καλείται σχέση γραμμικής εξάρτησης των $\vec{x_1}, \ldots \vec{x_n}$. Το σύνολο διανυσμάτων $X = \{\vec{x_1}, \ldots \vec{x_n}\}$ καλείται γραμμικά ανεξάρτητο $\Leftrightarrow$ το X δεν είναι γραμμικά εξαρτημένο, δηλαδη $\forall\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in \mathbb{K}: \lambda_1 \vec{x_1} + \lambda_2 \vec{x_2} + \ldots + \lambda_n \vec{x_n} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ① $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots \vec{e_n}\} \subseteq \mathbb{K}^n$ $\vec{e_i} = (0, \ldots, \underset{i\text{-οστη θεση}}{1}, 0, \ldots 0)$

Εστω οτι $\lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \ldots + \lambda_n \vec{e_n} = \vec{0} \Rightarrow$

$\lambda_1 (1, 0, \ldots, 0) + \lambda_2 (0, 1, 0 \ldots 0) + \ldots + \lambda_n (0, 0, \ldots, 1) = (0, \ldots 0)$

$= (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = (0, 0, \ldots 0) \Rightarrow (\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0)$

$\Rightarrow$ το σύνολο $\{\vec{e_1}, \ldots \vec{e_n}\}$ Γραμμικα Ανεξάρτητο

② Εστω $X = \{\{E_{ij}\}_{i=1, j=1}^{m\ \ n}\} \subseteq M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $E_{ij} = \begin{array}{r c} & j\text{-γραμμη} \\ i\text{-γραμμη} & \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

Τότε το X: γραμμικά ανεξάρτητο. Εστω: $\alpha_{11} E_{11} + \ldots + \alpha_{1n} E_{1n} + \ldots + \alpha_{m1} E_{m1} + \ldots + \alpha_{mn} E_{mn}$

$= 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_{ij} = 0, \ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m$

Αρα το X γραμμικά ανεξάρτητο

③ Έστω ο $\mathbb{K}$-δ.χ $\mathbb{K}_n[x]$ και $X=\{1, x, x^2, \dots x^n\}$ Τότε X γραμμικά ανεξάρτητο

διότι αν $\alpha_0 1 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n = 0 \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

④ E: $\mathbb{K}$-δ.χ και $\vec{x} \in E$ τότε $\vec{x}$: γραμμικά ανεξάρτητο $\Leftrightarrow \vec{x} \neq \vec{0}$

το $\vec{x} = \vec{0}$ είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένο διότι $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Έστω $\vec{x} \neq \vec{0}$ και $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}$ Αν $\lambda \neq 0 \Rightarrow \exists \lambda^{-1} \in \mathbb{K}$ και τότε $\lambda^{-1} \cdot \lambda \cdot \vec{x} = \lambda^{-1} \cdot \vec{0} = \vec{0}$

$\Rightarrow 1 \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$ άτοπο Άρα $\lambda = 0$ $\Rightarrow \vec{x}$ Γραμμικά ανεξάρτητο.

Αντίστροφα: αν $\vec{x}$ γραμμικά ανεξάρτητο, τότε το $\vec{x} \neq \vec{0}$ διότι αν $\vec{x} = \vec{0}$ είδαμε ότι το $\vec{x}$ γραμμικά ανεξάρτητο: άτοπο.

28/11/2017

E: διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$

Αν $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots x_n \in E$, τότε τα $\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}$ καλούνται γραμμικά ανεξάρτητα (Γ.Α)

$\Leftrightarrow \forall \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n : \lambda_1 \vec{x_1} + \lambda_2 \vec{x_2} + \dots + \lambda_n \vec{x_n} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

Τα $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}$ καλούνται γραμμικά εξαρτημένα (Γ.Ε) $\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ και $\lambda_1 \vec{x_1} + \lambda_2 \vec{x_2} + \lambda_n \vec{x_n} = \vec{0}$ και η τελευταία

σχέση θα καλείται τότε σχέση γραμμικής εξάρτησης των $\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ① Αν $\vec{0} \in \{\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}\}$ τότε το σύνολο $\{\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}\}$

Έστω ότι $\vec{x_k} = \vec{0}$, όπου $k = 1, \dots n$ και τότε $0 \cdot \vec{x_1} + \dots + 0 \cdot \vec{x_{k-1}} + 1 \vec{x_k} + 0 \vec{x_{k+1}} + \dots + 0 \cdot \vec{x_n} =$

σχέση γραμμικής εξάρτησης.

② Αν $X = \{\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}\}$ είναι ένα Γ.Α σύνολο και $Y \subseteq X$ Τότε Y Γ.Α

Έστω ότι $Y = \{\vec{x_{i_1}}, \dots \vec{x_{i_k}}\}$ όπου $i_1, \dots i_k \in \{1, \dots k\}$ Αν $\lambda_1, \dots \lambda_k \in \mathbb{K}$

και $\lambda_1 \vec{x_{i_1}} + \dots \lambda_k \cdot \vec{x_{i_k}} = \vec{0}$ Τότε: $\lambda_1 \vec{x_{i_1}} + \dots + \lambda_k x_{i_k} + 0 \vec{x_{i_{k+1}}} + \dots + 0 \vec{x_{i_n}} = \vec{0}$

όπου $\{i_1, \dots i_k, \dots i_n\} = \{1, \dots n\}$ Επειδή $\{\vec{x_{i_1}}, \dots \vec{x_{i_n}}\} = \{\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}\}$ και

το σύνολο αυτό είναι Γ.Α $\Longrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k$ Άρα Y Γ.Α

③ Αν $X = \{\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}\}$ είναι ένα Γ.Ε σύνολο και $Y \subseteq E$: $X \subseteq Y$ Τότε: Y: Γ.Ε

Έστω ότι $Y = \{\underbrace{\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}}_{X}, \vec{x_{n+1}}, \dots \vec{x_m}\}$ Επειδή το X: Γ.Ε $\Rightarrow$

$\exists \lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{K}$: $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$: $\lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_n \vec{x_n} = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_n \vec{x_n} + 0 \cdot \vec{x_{n+1}} + \dots + 0 \cdot \vec{x_m} = \vec{0}$ και $(\lambda_1, \dots \lambda_n, 0, \dots 0) \neq (0, 0)$

Αρα το Γ.Ε

(4) Εστω $X = \{\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}\} \subseteq E$. Τότε το X: Γ.Ε $\Leftrightarrow \exists\, k = 1, \dots, n$: είτε $\vec{x_k} = \vec{0}$ είτε $\vec{x_k} \in \langle \vec{x_1}, \dots, \vec{x_{k-1}} \rangle$

"$\Leftarrow$" Εστω ότι $\exists\, k = 1, \dots, n$: είτε $\vec{x_k} = \vec{0}$ είτε: $\vec{x_k} \in \langle x_1, \dots, \vec{x_{k-1}} \rangle$

Αν $\vec{x_k} = \vec{0}$ τότε είδαμε ότι το X: Γ.Ε Αν $\vec{x_k} \in \langle \vec{x_1}, \dots, \vec{x_{k-1}} \rangle$ τότε

$\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1} \in \mathbb{K}$: $\vec{x_k} = \lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_{k-1} \vec{x_{k-1}} \Rightarrow \lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_{k-1} \vec{x_{k-1}} + (-1)\vec{x_k} + 0\vec{x_{k+1}} + \dots + 0\vec{x_n}$

Η τελευταία σχέση είναι μια σχέση γραμμικής εξάρτησης $\lambda_k = -1 \neq 0$ Αρα X: Γ.Ε

"$\Rightarrow$" Έστω ότι X: Γ.Ε Τότε $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ με $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq (0, \dots, 0)$ και $\lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_n \vec{x_n} = \vec{0}$. Θέτουμε:

$k = \max\{i, \dots, n \mid \lambda_i \neq 0\}$ Τότε $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$

(1) Αν $k = 1$, τότε $\lambda_1 \neq 0$ και $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ και $\lambda_1 \cdot \vec{x_1} = \vec{0}$ $\Big| \rightarrow \vec{x_1} = 0$

(2) Αν $k \geq 2$, τότε $\lambda_1 \cdot \vec{x_1} + \dots + \lambda_k \cdot \vec{x_k} = \vec{0}$ $\qquad \lambda_1 \neq 0$

$\Rightarrow \lambda_1 \cdot \vec{x_1} + \dots + \lambda_{k-1} \vec{x_{k-1}} = (-\lambda_k)\vec{x_k} \Rightarrow \vec{x_k} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)\vec{x_1} + \dots + \left(\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\right)\vec{x}_{k-1} \in \langle \vec{x_1}, \dots, \vec{x_{k-1}} \rangle$

(5) Έστω $X = \{\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}\}$: Γ.Α και έστω $\vec{x} \in E$:

$X \cup \{\vec{x}\} = \{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots \vec{x_k}, \vec{x}\}$: Γ.Ε. Τότε: $\vec{x} \in \langle \vec{x_1}, \dots, \vec{x_n} \rangle$

$X \cup \{\vec{x}\}$ Γ.Ε $\Rightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n, \lambda \in \mathbb{K}$: $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n, \lambda) \neq (0, \dots, 0)$,

$\lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_n \vec{x_n} + \lambda \vec{x} = 0$ (*)

- Αν $\lambda = 0$ τότε $\lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_n \vec{x_n} = \vec{0} \xrightarrow[\text{Γ.Α}]{X} \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$: άτοπο, διότι $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda) = (0, \dots, 0)$
- Άρα $\lambda \neq 0$ και τότε: (*) $\Rightarrow \vec{x} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)\vec{x_1} + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right)\vec{x_n} \in \langle \vec{x_1}, \dots, \vec{x_n} \rangle$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (1) $\quad \vec{x_1} = (1, 2, -1)$, $\vec{x_2} = (1, -2, 1)$, $\vec{x_3} = (-3, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$

Εστω ότι $\lambda_1 \vec{x_1} + \lambda_2 \vec{x_2} + \lambda_3 \vec{x_3} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 (1, 2, -1) + \lambda_2 (1, -2, 1) + \lambda_3 (-3, 2, 1) = \vec{0} = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3, 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3, -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A| = 1 \neq 0$ άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την μηδενική $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Αρα τα $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}$ Γ.Α

② $\vec{x_1}=(1,2,-1)$, $\vec{x_2}=(1,-2,1)$, $\vec{x_3}=(-3,2,1)$

$\lambda_1\vec{x_1}+\lambda_2\vec{x_2}+\lambda_3\vec{x_3}=0$

$$(\Sigma)\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3=0\\ 2\lambda_1-2\lambda_2+2\lambda_3=0\\ -\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3=0\\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\\ -\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3=0\\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2\lambda_1-2\lambda_3=0\Rightarrow \lambda_1=\lambda_3\\ \lambda_1+\lambda_2-3\lambda_1=0\Rightarrow\lambda_2-2\lambda_1=0\Rightarrow\lambda_2=2\lambda_1\end{array}$$

Θέτουμε $\lambda_1=\kappa\in\mathbb{K}$ και τότε Γενική λύση του (Σ): $\lambda_1=\kappa$

$\lambda_2=2\kappa$, $\kappa\in\mathbb{K}$

$\lambda_3=\kappa$

Για $\kappa=1$, έχουμε $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=1$ και τότε $\vec{x_1}+2\vec{x_2}+\vec{x_3}=\vec{0}$

$\Rightarrow\{3\vec{x_1}+\vec{x_2}+\vec{x_3}\}$: Γ.Ε

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>: $\mathbb{K}_n[x]=\{P(x)\in\mathbb{K}[x]\,|\,\deg P(x)\leq n\}\cup\{0\}$

① Το σύνολο $\{1,x,x^2,\ldots,x^4\}$: σύνολο γεννητόρων και Γ.Α

② Έστω $P_0(x),P_1(x),\ldots,P_n(x)$ πολυώνυμα υπεράνω του $\mathbb{K}$ και υποθέτουμε ότι $\deg P_0(x)=0$, $\deg P_1(x)=1,\ldots,\deg P_n(x)=n$. Τότε το σύνολο

$B=\{P_0(x),P_1(x),\ldots,P_n(x)\}$: Γ.Α

Έστω ότι: $\lambda_0P_0(x)+\lambda_1P_1(x)+\ldots+\lambda_{n-1}P_{n-1}(x)+\lambda_nP_n(x)=0$

- Αν θέσουμε $Q(x)=$ το πολυώνυμο του πρώτου μέλους, τότε:
- Αν $\lambda_n\neq0$, τότε $\deg Q(x)=n$ άτοπο, διότι $Q(x)=0$

Άρα $\lambda_n=0$ και τότε $Q(x)=\lambda_0P_0(x)+\lambda_1P_1(x)+\ldots+\lambda_{n-1}P_{n-1}(x)=0$

- Αν $\lambda_{n-1}\neq0$, τότε $\deg Q(x)=n-1$, άτοπο, διότι $Q(x)=0$

Άρα $\lambda_{n-1}=0$

⋮

Συνεχίζεται αυτή η διαδικασία, έπεται ότι $\lambda_0=\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$ Άρα $B=$Γ.Α Για παράδειγμα: $B=\{1,(x-\alpha),(x-\alpha)^2,\ldots,(x-\alpha)^n\}$ Γ.Α

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $X \subseteq E$. Τότε:

① Το X καλείται **Γ.Α** $\underset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow}$ κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του X είναι Γ.Α

② Το X καλείται **Γ.Ε** $\underset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow}$ υπάρχει πεπερασμένο Γ.Ε υποσύνολο του X

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω $B = \{1, x, x^2, x^3, \ldots x^n\} \subseteq \mathbb{K}[x]$ Έστω X ένα πεπερασμένο υποσύνολο του B Τότε το X είναι της μορφής $X = \{x^{k_1}, x^{k_2}, \ldots x^{k_n}\}$ και μπορούμε να υποθέσουμε ότι $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$. Αν $\lambda_1 x^{k_1} + \lambda_2 x^{k_2} + \ldots + \lambda_n x^{k_n} = 0 \Rightarrow$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$ (όπως και προηγούμενη) Άρα το B: Γ.Α

1/12/2017

E: διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα υποσύνολο $B \subseteq E$ καλείται Βάση $E \Leftrightarrow$

Το σύνολο B: ΓΑ: κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του B είναι ΓΑ

Το B παράγει του E: $E = \langle B \rangle$: κάθε διάνυσμα του E είναι γραμμικό συνδυασμός πεπερασμένου πλήθους διανυσμάτων του B

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ① Στον $\mathbb{K}$-δ.χ $\mathbb{K}^n$ το σύνολο διανυσμάτων $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}\}$ όπου $\vec{e_i} = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)$, $1 \le i \le n$ είναι Βάση η οποία καλείται κανονική Βάση του $\mathbb{K}^n$

② $\mathbb{K}n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \; x_i \in \mathbb{K}, \; 1 \le i \le n \right\}$: χώρος των στηλών με n στοιχεία από το $\mathbb{K}$

Το σύνολο $B = \{E_1, E_2, \ldots E_n\}$, όπου $E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$-θέση

είναι Βάση του $\mathbb{K}n$, η οποία καλείται κανονική Βάση

- Αν $\lambda_1 E_1 + \ldots + \lambda_n E_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_i = 0, \; 1 \le i \le n \Rightarrow B = \Gamma.A$

• Έστω $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 E_1 + \dots + x_n E_n \Rightarrow$ B παράγει τον $\mathbb{K}^n$

③ Στον $\mathbb{K}$-δ.χ $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ το σύνολο

$B = \{E_{ij}\}_{i=1, j=1}^{m \quad n}$, όπου $E_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-γραμμή} \\ \uparrow \\ j\text{-στήλη} \end{array}$

$A = (a_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$

είναι βάση του $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ η οποία καλείται κανονική βάση

④ Στον $\mathbb{K}$-δ.χ $\mathbb{K}_n[x] = \{P(x) \in \mathbb{K}[x] \mid \deg P(x) \leq n\} \cup \{0\}$ το σύνολο

$B = \{1, x, x^2, \dots x^n\}$

είναι βάση του $\mathbb{K}_n[x]$ η οποία καλείται κανονική βάση

⑤ Στον $\mathbb{K}$-δ.χ $\mathbb{K}[x]$ όλων των πολυωνύμων υπεράνω του $\mathbb{K}$, το σύνολο

$B = \{1, x, x^2, \dots x^n\}$

είναι βάση του $\mathbb{K}[x]$ η οποία καλείται κανονική βάση

⑥ Ο $\mathbb{C}$ $\mathbb{K}$.δ.χ $\mathbb{C}$ έχει μια βάση $B=\{1\}$

Ο $\mathbb{R}$-δ.χ $\mathbb{C}$ $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$ έχει ως βάση το $B=\{1,i\}$

$(\underset{\lambda_1}{-1}) 1 + (\underset{\lambda_2}{-i}) i = -1+1=0$ το $\{1,i\}$: Γ.Ε υπεράνω του $\mathbb{C}$

$\{1,i\}$: ΓΑ υπεράνω

$\lambda_1 + \lambda_2 i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$
$(\lambda_1 + \lambda_2 i)(\lambda_1 - \lambda_2 i) = 0$
$\lambda_1^2 - \lambda_2^2 =$
$\Downarrow$
$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω ότι έχουμε ένα σύνολο $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \dots \vec{e_n}\} \subseteq E_1$ και $\vec{x} \in E$

Το $\vec{x}$ γράφεται μοναδικά σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$

$\Leftrightarrow$ αν $\left.\begin{array}{l} \vec{x} = \lambda_1\vec{e_1} + \dots + \lambda_n\vec{e_n} \\ \vec{x} = \kappa_1\vec{e_1} + \dots + \kappa_n\vec{e_n} \\ \text{όπου } \lambda_i, \kappa_i \in \mathbb{K} \quad 1 \leq i \leq n \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \kappa_1, \dots, \lambda_n = \kappa_n$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ένα σύνολο $B = \{\vec{e_1}, \dots \vec{e_n}\} \subseteq E$ είναι βάση του $E \Leftrightarrow$ κάθε διάνυσμα του E γράφεται μοναδικά σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{e_1}, \dots \vec{e_n}$

Απόδειξη: "$\Rightarrow$" Έστω ότι το B: βάση του E. Τότε κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in E$ γράφεται ως $\vec{x} = \lambda_1\vec{e_1} + \dots + \lambda_n\vec{e_n}$, όπου $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{K}$

Έστω $\vec{x} = \kappa_1\vec{e_1} + \ldots + \kappa_n\vec{e_n}$ Τότε $\lambda_1\vec{e_1} + \ldots + \lambda_n\vec{e_n} + \ldots + \kappa_n\vec{e_n} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda_1 - \kappa_1)\vec{e_1} + \ldots + (\lambda_n - \kappa_n)\vec{e_n} = \vec{0} \\ \{\vec{e_1} \ldots \vec{e_n}\} \ \Gamma.A\end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{ll}\lambda_1 - \kappa_1 = 0, \ldots & \lambda_n - \kappa_n = 0 \\ \lambda_1 = \kappa_1 & \lambda_n = \kappa_n\end{array}$$

Άρα έχουμε μοναδικότητα της γραφής

"$\Leftarrow$" προφανώς το σύνολο B παράγει τον E. Έστω ότι $\lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + \ldots + \lambda_n\vec{e_n} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{e_1} + 0\,\vec{e_2} + \ldots + 0\vec{e_n}$ λόγω μοναδικότητας της γραφής $\Rightarrow$

$\lambda_1 = 0, \ldots \lambda_n = 0$ Άρα $B: \Gamma A \Rightarrow B$ Βάση

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $B = \{\vec{e_1}, \ldots \vec{e_n}\}$: Βάση του E Τότε κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in E$ γράφεται μοναδικά ως: $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \ldots + x_n\vec{e_n}, \ldots x_i \in \mathbb{K}$ $1 \leq i \leq n$

Οι αριθμοί $x_1, \ldots, x_n$ είναι μοναδικοί εξαρτώνται μόνο από το $\vec{x}$ και τη Βάση B και καλούνται συντεταγμένες του $\vec{x}$ ως προς τη Βάση

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω $B = \{\vec{e_1}(1,0,0), \vec{e_2}(0,1,0), \vec{e_3} = (0,0,1)\}$ η κανονική Βάση του $\mathbb{R}^3$

Έστω $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $(x,y,z) = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z) =$

$= x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = x \cdot \vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$ Οι αριθμοί x, y, z είναι οι συντεταγμένες του (x,y,z) ως προς την κανονική Βάση του $\mathbb{R}^3$

Έστω το υποσύνολο $G = \{\vec{\varepsilon_1} = (1,1,1), \vec{\varepsilon_2} = (1,1,0), \vec{\varepsilon_3} = (1,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

- Έστω $\lambda_1\vec{\varepsilon_1} + \lambda_2\vec{\varepsilon_2} + \lambda_3\vec{\varepsilon_3} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,1,0) + \lambda_3(1,0,0) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0\end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad \text{Άρα } G: \Gamma.A$$

- Έστω $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ και έστω ότι: $(x,y,z) = \alpha\vec{\varepsilon_1} + \beta\vec{\varepsilon_2} + \gamma\vec{\varepsilon_3} \Rightarrow$

$(x,y,z) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0) = (\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta, \alpha)$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha + \beta + \gamma = x \\ \alpha + \beta = y \Rightarrow \beta = y - \alpha \Rightarrow \beta = y - z \\ \alpha = z\end{cases} \qquad \begin{array}{l}\gamma = x - \alpha - \beta = x - z - (y - z) = \\ = x - z - y + z = x - y \Rightarrow \\ \gamma = x - y\end{array}$$

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $(x,y,z) = z\vec{\varepsilon_1} + (y-z)\vec{\varepsilon_2} + (x-y)\vec{\varepsilon_3}$

Άρα το G: παράγει τον $\mathbb{R}^3$ και επομένως είναι μια Βάση του $\mathbb{R}^3$

Οι συντεταγμένες του (x,y,z) ως προς τη Βάση G είναι: $z, y-z, x-y$

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots \vec{e_n}\}$ μια βάση του $\mathbb{K}$-δ.χ E και έστω $G = \{\vec{y_1}, \vec{y_2}, \dots, \vec{y_m}\} \subseteq E$. Αν $m > n$, τότε G: Γ.Ε

Απόδειξη Αναζητούμε $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$, με: $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq (0, 0)$ και έτσι ώστε $\lambda_1 \vec{y_1} + \lambda_2 \vec{y_2} + \dots + \lambda_m \vec{y_m} = \vec{0}$ Επειδή το B: Βάση του E ⇒ κάθε διάνυσμα του E γράφεται μοναδικώς γραμμικός συνδυασμός των $\vec{e_1}, \dots \vec{e_n}$. Άρα:

$$\left.\begin{aligned} \vec{y_1} &= \alpha_{11}\vec{e_1} + \dots + \alpha_{n1}\vec{e_n} \\ \vec{y_2} &= \alpha_{12}\vec{e_1} + \dots + \alpha_{n2}\vec{e_n} \\ &\vdots \\ \vec{y_m} &= \alpha_{1m}\vec{e_1} + \dots + \alpha_{nm}\vec{e_n} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\lambda_1\vec{y_1} + \lambda_2\vec{y_2} + \dots + \lambda_m\vec{y_m} = \vec{0} \Rightarrow \\ &\lambda_1(\alpha_{11}\vec{e_1} + \dots + \alpha_{n1}\vec{e_n}) + \\ &\lambda_2(\alpha_{12}\vec{e_1} + \dots + \alpha_{n2}\vec{e_n}) + \\ &\vdots \\ &+ \lambda_m(\alpha_{1m}\vec{e_1} + \dots + \alpha_{nm}\vec{e_n}) = \vec{0} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\alpha_{12} + \dots + \lambda_m\alpha_{1m})\vec{e_1} + \dots \Leftrightarrow$$

$$\vdots$$

$$+ (\lambda_1\alpha_{n1} + \lambda_2\alpha_{n2} + \dots + \lambda_m\alpha_{nm})\vec{e_n} = 0$$

$$\overset{B = \Gamma.A}{\Rightarrow} \left\{\begin{aligned} &\lambda_1\alpha_{11} + \dots + \lambda_m\alpha_{1m} \\ &\qquad\qquad\qquad (\Sigma) \\ &\lambda_1\alpha_{n1} + \dots \lambda_m\alpha_{nm} \end{aligned}\right.$$

Στο σύστημα (Σ) με αγνώστους $\lambda_1, \dots \lambda_m$ έχουμε πλήθος αγνώστων $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ δηλαδή m > πλήθος εξισώσεων, δηλαδή n. Τότε γνωρίζουμε ότι το (Σ) έχει τουλάχιστον μια μη-μηδενική λύση $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq (0, \dots, 0)$ και τότε $\lambda_1\vec{y_1} + \dots + \lambda_m\vec{y_m} = \vec{0}$ Άρα G: Γ.Ε

Πόρισμα: Αν $B = \{\vec{e_1}, \dots \vec{e_n}\}$ βάση του $\mathbb{K}$-δ.χ E. Τότε κάθε Γ.Α σύνολο διανυσμάτων του E έχει πλήθος στοιχείων $\leq n$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω B, B': Βάσεις του $\mathbb{K}$-δ.χE, και έστω: $|B| = n$, $|B'| = m$ τότε $n = m$

Απόδειξη:

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &B \text{ Βάση} \\ &B': \Gamma.A \end{aligned}\right| \xrightarrow{\text{ΠΟΡΙΣΜΑ}} |B'| \leq |B| \\ &\left.\begin{aligned} &B': \text{Βάση} \\ &B: \Gamma A \end{aligned}\right| \xrightarrow{\text{ΠΟΡΙΣΜΑ}} |B| \leq |B'| \end{aligned}\right| \longrightarrow |B| = |B'|$$

1/12/2017

ΘΕΩΡΗΜΑ Εστω F και G δύο σύνολα διανυσμάτων στον $\mathbb{K}$-δ.χ E υποθέτουμε ότι: ① F: Γ.Α Τότε υπάρχει μια βάση B του E:
② $\langle G\rangle = E$ $F \subseteq B \subseteq G$
③ $|G| < \infty$
④ $F \subseteq G$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θεωρούμε το ακόλουθο υποσύνολο του E:
$H = \{K \subseteq E \mid F \subseteq K \subseteq G$ και K: Γ.Α$\}$ Τότε το $H \neq \emptyset$, διότι $F \in H$. Επειδή $|G| < \infty$, έπεται ότι το H περιέχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Εστω B το υποσύνολο που ανήκει στο H με το μικρότερο πλήθος στοιχείων. Τότε το B: Γ.Α * Έστω $\vec{x} \in G$.
Τότε έστω το σύνολο $B \cup \{\vec{x}\}$ Τότε: επειδη
$B \in H \Rightarrow F \subseteq B \subseteq G$ και επειδή $\vec{x} \in G$ έπεται ότι $F \subseteq B \cup \{\vec{x}\} \subseteq G$.
Αν το $B \cup \{\vec{x}\}$: Γ.Α τότε καταλήγουμε άτοπο διότι
$|B \cup \{x\}| > |B|$ και το B είναι το στοιχείο του H με το μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων. Αρα $B \cup \{\vec{x}\}$: Γ.Ε και τότε από γνωστή ΠΡΟΤΑΣΗ $\vec{x}$ γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του B: $\vec{x} \in \langle B\rangle$
Αρα κάθε διάνυσμα του G είναι γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του B
Όμως κάθε διάνυσμα του E είναι γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του G
$\Rightarrow$ κάθε διάνυσμα του E είναι γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του B $\langle B\rangle = E$ ** Απο τις * ** $\Rightarrow$ B Βάση και $F \subseteq B \subseteq G$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Εστω E ένας $\mathbb{K}$δ.χ ο οποίος είναι πεπερασμένα παραγόμενο και $E \neq \{\vec{0}\}$ Τότε ο E έχει μια Βάση B με $|B| < \infty$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $E \neq \{\vec{0}\}$ και επειδή ο E πεπερασμένα παραγόμενος $\Rightarrow$
$\exists\, G \subseteq E$: $|G| < \infty$ και $\langle G\rangle = E$ Επειδή $E \neq \{\vec{0}\} \Rightarrow \exists\, \vec{e_1} \in G$ με $\vec{e_1} \neq \vec{0}$.
Τότε $\{\vec{e_1}\}$ Γ.Α και $\{\vec{e_1}\} \subseteq G$ σύνολο γεννητόρων $|G| < \infty$
Τότε από το προηγούμενο Θεώρημα, θέτοντας $F = \{\vec{e_1}\}$, έπεται ότι υπάρχει Βάση του E: $\{\vec{e_1}\} \subseteq B \subseteq G$ και προφανώς $|B| < \infty$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω E: πεπερασμένα παραγόμενος $\mathbb{K}$-δχ Τότε:
① Αν $E = \{\vec{0}\}$, ορίζουμε τη διάσταση του E να είναι $\dim_{\mathbb{K}} E = 0$

Αν $\lambda_1(\vec{e_1},0)+\ldots+\lambda_n(\vec{e_n},\vec{0})+\kappa_1(\vec{0},\vec{\varepsilon_1})+\ldots+\kappa_m(\vec{0},\vec{e_m})=\vec{0}_{E\times F}=(0,0)$

$\Rightarrow (\lambda_1\vec{e_1}+\ldots+\lambda_n\vec{e_n})\ \kappa_1\vec{\varepsilon_1}+\ldots+\kappa_m\vec{e_m}=(\vec{0},\vec{0})$

$\Rightarrow \begin{cases}\lambda_1\vec{e_1}+\ldots+\lambda_n\vec{e_n}=\vec{0}\ \{\vec{e_1},\ldots,\vec{e_n}\}\ \Gamma.A\\ \kappa_1\vec{e_1}+\ldots+\kappa_m\vec{e_m}=\vec{0}\ \{\vec{e_1},\ldots,\vec{e_m}\}\ \Gamma.A\end{cases}$

Αρα D: Γ.Α

Επομένως P: Βαση του $E\times F$ και αρα:

$\dim_{\mathbb{K}}(E\times F)=|D|=n+m=\dim_{\mathbb{K}}E+\dim_{\mathbb{K}}F$

ΑΣΚΗΣΗ ① $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}_5[x])=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4+\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_5[x]=4+6=10$

② $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3\times\mathbb{C}^4)=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3+\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^4=3+\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C})$

$=3+\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}+\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}+\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}+\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=$

$=3+2\cdot4=3+8=11$

ΑΣΚΗΣΗ Αν $E_1,\ldots,E_n$: $\mathbb{K}$-δ.χ και $\dim_{\mathbb{K}}E_i=m_i$, $1\leq i\leq n$, τοτε:

$\dim_{\mathbb{K}}(E_1\times E_2\times\ldots\times E_n)=\dim_{\mathbb{K}}E_1+\dim_{\mathbb{K}}E_2+\ldots+\dim_{\mathbb{K}}E_n$

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω E: $\mathbb{K}$δχ και $\dim_{\mathbb{K}}E=n$

α Κάθε Γ.Α σύνολο διανυσμάτων του E έχει $\leq n$ στοιχεία

β Κάθε σύνολο γεννητόρων του E έχει $\geq n$ στοιχεία

γ Κάθε σύνολο διανυσμάτων του E με $>n$ στοιχεία είναι Γ.Ε

δ Αν B είναι ένα σύνολο διανυσμάτων του E, τότε το B είναι βάση του $E \Leftrightarrow$ ικανοποιεί 2 απο τις 3 ακόλουθες

1. B: Γ.Α
2. $\langle B\rangle=E$
3. $|B|=\dim_{\mathbb{K}}E=n$

Απόδειξη α έχουμε αποδείξει (επειδή $\dim_{\mathbb{K}}E=n\Rightarrow$ ο E έχει μια βάση με n στοιχεία $\Rightarrow$ κάθε Γ.Α σύνολο διανυσμάτων του E έχει $\leq n$ στοιχεία)

β Αν $G\subseteq E$ με $\langle G\rangle=E$ και $|G|<n$ Τότε γνωρίζουμε ότι το G περιέχει μια βάση B' του E. Τότε $|B'|=\dim_{\mathbb{K}}E=n$ Όμως $B'\subseteq G\Rightarrow$

$n = |B'| \leq |G'| < n$ άτοπο Άρα $|G| \geq n$

(γ) είναι ισοδύναμο με το α

(δ) ①+② $\Rightarrow$ B: Βάση από τον ορισμό της Βάσης

①+③ $\Rightarrow$ B: Γ.Α $\Rightarrow$ Το B επεκτείνεται σε μια Βάση Y του E τότε

$|Y| = n = \dim_{\mathbb{K}} E = |B|$ και $B \subseteq Y \Rightarrow B = Y$: Βάση

②+③ $\langle B \rangle = E$, $|B| = n = \dim_{\mathbb{K}} E$ $\Rightarrow$ $\exists$ Βάση D του E με $D \subseteq B \Rightarrow |D| \leq |B|$, όμως $|D| = \dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} B \Rightarrow D = B$ Βάση

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Στον $\mathbb{K}$-δχ $\mathbb{K}_n[x]$, το υποσύνολο $C = \{1, (x-\alpha), (x-\alpha)^2, \ldots, (x-\alpha)^n\}$: Βάση. Γνωρίζουμε ότι το C: Γ.Α. Επειδή $|C| = n+1 = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[x]$, από το θεώρημα έπεται ότι C: Βάση

ΓΕΝΙΚΟΤΕΡΑ αν $C = \{P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)\} \subseteq \mathbb{K}_n[x]$ όπου $\deg P_i(x) = i$, $0 \leq i \leq n$. Τότε C: Βάση του $\mathbb{K}_n[x]$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω E: $\mathbb{K}$-δχ και $\dim_{\mathbb{K}} E = n$. Αν V: υπόχωρος του E τότε:

① Ο V έχει πεπερασμένη διάσταση και μάλιστα:

$$\dim_{\mathbb{K}} V \leq \dim_{\mathbb{K}} E$$

② $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} E \Leftrightarrow V = E$

8/12/2016

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω E: $\mathbb{K}$-δ.χ και υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} E = n < \infty$

Αν V είναι ένας υπόχωρος του E. Τότε

① Ο V έχει πεπερασμένη διάσταση και $\dim_{\mathbb{K}} V \leq \dim_{\mathbb{K}} E$

② $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} E \Leftrightarrow V = E$

Απόδειξη ① Αν $V = \{\vec{0}\}$, τότε προφανώς $\dim_{\mathbb{K}} V = 0$ και ο V έχει πεπερασμένη διάσταση. Έστω ότι $V \neq \{\vec{0}\}$. Τότε ο V περιέχει τουλάχιστον ένα διάνυσμα $\vec{x} \neq \vec{0}$ το οποίο τότε είναι Γ.Α διανύσματα, τα οποία προφανώς είναι Γ.Α διανύσματα του E. Για κάθε Γ.Α σύνολο διανυσμάτων T του V θα έχουμε $|T| \leq n = \dim_{\mathbb{K}} E$. Έστω $S = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_2\}$ το υποσύνολο του V με το μεγαλύτερο πλήθος Γ.Α διανυσμάτων. Τότε $|S| = m \leq n$ ΘΔο: S Βάση του V Επειδή S: Γ

8/12/2017

αρκεί νδο $\langle S\rangle = V$. Έστω ότι $\langle S\rangle \neq V$. Τότε $\exists \vec{y} \in V: \vec{y} \notin \langle S\rangle$

Το υποσύνολο $S \cup \{\vec{y}\}$ είναι Γ.Ε διότι έχει $m+1$ στοιχεία και το υποσύνολο του V με το μεγαλύτερο πλήθος Γ.Α διανυσμάτων έχει m στοιχεία. Επειδή το $S \cup \{\vec{y}\}$: ΓΕ | Γνωστή $\vec{y} \in \langle S\rangle$: άτοπο, διότι

S: ΓΑ | Πρόταση $\vec{y} \notin \langle S\rangle$

Άρα $\langle S\rangle = V$. Επομένως S: Βάση του V και άρα $\dim_{\mathbb{K}} V = |S| = m \leq n$

② Προφανώς $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} E$, αν $V = E$. Αντίστροφα, έστω $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} E = n$

Έστω $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$: Βάση του V. Τότε B: ΓΑ υποσύνολο του E. Επειδή $|B| = n = \dim_{\mathbb{K}} E$, έπεται ότι είναι Βάση του E. Τότε, $\forall \vec{x} \in E$:

ΑΠΟΔΕΙΞΗ $\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$ | $\Rightarrow$ $\vec{x} \in V$. Άρα $E \subseteq V$, δηλαδή $V = E$

Όμως $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \in V$ |

Αν $V, W \subseteq E$ είναι υπόχωροι του E, τότε: $V \cap W$: υπόχωρος του E

$V + W = \{\vec{x} + \vec{y} \in E \mid \vec{x} \in V, \vec{y} \in W\}$

υπόχωρος του E.

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω E: $\mathbb{K}$-δ.χ πεπερασμένης διάστασης και V, W δύο υπόχωροι του E. Τότε $\dim_{\mathbb{K}}(V+W) = \dim_{\mathbb{K}} V + \dim_{\mathbb{K}} W - \dim_{\mathbb{K}}(V \cap W)$

Σκιαγράφηση Απόδειξης Έστω: $f_1, \dots, f_k$ Βάση της $V \cap W \subseteq W$, $\subseteq V$

Συμπληρώνουμε το Γ.Α υποσύνολο $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k\}$ σε:

① μια Βάση $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ του V

② μια Βάση $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k, \vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_m\}$ του W

Ισχυρισμός Το υποσύνολο $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k, \vec{e}_1 \dots \vec{e}_n, \vec{\varepsilon}_1 \dots \vec{\varepsilon}_m\}$ είναι Βάση του $V+W$ (ΑΣΚΗΣΗ)

Τότε $\dim_{\mathbb{K}}(V+W) = k+n+m$ $\quad \dim_{\mathbb{K}} V + \dim_{\mathbb{K}} W - \dim(V \cap W) =$

$\cancel{k} + n + k + m - \cancel{k} = k+n+m$

ΣΚΗΣΗ $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1-2x_2+x_3-x_4=0\}\subseteq\mathbb{R}^4$

ΔΟ το V: υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ και να βρεθεί μια βάση του V

V: $\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_4=x_1-2x_2+x_3\}=$

$=\{(x_1,x_2,x_3,x_1-2x_2+x_3)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}=$

$=\{(x_1,0,0,x_1)+(0,x_2,0,-2x_2)+(0,0,x_3,x_3)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$

$=\{x_1\underbrace{(1,0,0,1)}_{\vec{\varepsilon_1}}+x_2\underbrace{(0,1,0,-2)}_{\vec{\varepsilon_2}}+x_3\underbrace{(0,0,1,1)}_{\vec{\varepsilon_3}}\in\mathbb{R}^4 \mid x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}=$

$=\langle\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_3}\rangle$

Εύκολα βλέπουμε ότι $\{\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_3}\}$: ΓΑ και άρα είναι βάση του V.

Επομένως $\dim_{\mathbb{R}} V=3$

Κριτήριο Γραμμικής Ανεξαρτησίας

Έστω

$\vec{x_1}=(\alpha_{11},\alpha_{12},\dots\alpha_{1n})$ $\quad$ Τότε το σύνολο $\{\vec{x_1},\dots\vec{x_n}\}$: ΓΑ $\Leftrightarrow$

$\vec{x_2}=(\alpha_{21},\alpha_{22},\dots\alpha_{2n})\in\mathbb{K}^n$ $\quad$ το σύνολο $\{\vec{x_1},\dots\vec{x_n}\}$ βάση του

$\vdots$ $\quad$ $\mathbb{K}^n \Leftrightarrow \begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & & \alpha_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$

$\vec{x_n}=(\alpha_{n1},\alpha_{n2},\dots\alpha_{nn})$

$\lambda_1\vec{x_1}+\dots+\lambda_n\vec{x_n}=\vec{0}\Rightarrow$

$\lambda_1(\alpha_{11},\alpha_{12},\dots\alpha_{1n})+\dots+\lambda_n(\alpha_{n1},\alpha_{n2},\dots\alpha_{nn})=(0,\dots,0)\Leftrightarrow$

$(\lambda_1\alpha_{11}+\dots+\lambda_n\alpha_{1n}+\dots,\lambda_1\alpha_{1n}+\dots+\lambda_n\alpha_{nn})=(0,\dots,0)\Leftrightarrow$ $(\Sigma)\left\{\begin{array}{l}\lambda_1\alpha_{11}+\dots+\lambda_n\alpha_{n1}=0\\ \vdots\\ \lambda_1\alpha_{1n}+\dots+\lambda_n\alpha_{nn}=0\end{array}\right.$

Άρα τα $\vec{x_1},\dots\vec{x_n}$: ΓΑ $\Leftrightarrow$ το ομογενές σύστημα (Σ) έχει την μηδενική λύση $\lambda_1=\dots=\lambda_n=0\Leftrightarrow$ η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών του (Σ) είναι $\neq 0\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{n1}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_{1n} & \dots & \alpha_{nn}\end{vmatrix}\neq 0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$

<u>ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΩΝ ΓΕΝΝΗΤΟΡΩΝ</u> Στον $\mathbb{K}^n$ θεωρούμε διανύσματα

$\vec{x_1} = (\alpha_{11}, \dots \alpha_{1n})$ Θέλουμε να βρούμε μια βάση του $\langle \vec{x_1}, \dots, \vec{x_m} \rangle$

$\vdots$

$\vec{x_m} = (\alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mn})$

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$ Έστω ότι η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του A είναι

ο πίνακας $A' = \begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \dots & \alpha'_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{m1} & \dots & \alpha'_{mn} \end{pmatrix}$ Έστω τα διανύσματα:

$\vec{x_1} = (\alpha'_{11}, \dots \alpha'_{1n})$ Τότε: $\langle \vec{x_1}, \dots, \vec{x_m} \rangle = \langle \vec{x_1}', \dots, \vec{x_m} \rangle$

$\vec{x_m} = (\alpha'_{m1}, \dots \alpha'_{mn})$

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ</u> Έστω στον K^n, τα Γ.Α διανύσματα:

$\vec{x_1} = (\alpha_{11}, \dots \alpha_{1n})$ Να συμπληρωθεί το σύνολο $\{\vec{x_1}, \dots \vec{x_m}\}$ σε μια βάση $\{\vec{x_1}, \dots \vec{x_m}, \vec{x_{m+1}}, \dots \vec{x_n}\}$ του $\mathbb{K}^n$

$\vdots$

$\vec{x_n} = (\alpha_{m1}, \dots \alpha_{mn})$

Αναζητούμε $n-m$ γραμμές έτσι ώστε ο πίνακας που θα προκύψει να έχει ορίζουσα $\neq 0$ και τότε θέτουμε: $\vec{x_{m+1}} = (\beta_{m+1,1}, \dots \beta_{m+1,n})$

$\vec{x_n} = (\beta_{n1}, \dots, \beta_{nn})$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> $\vec{x_1} = (1, -2, 4, 7)$, $\vec{x_2} = (0, 3, 15, 8)$

Έστω $\lambda_1 \vec{x_1} + \lambda_2 \vec{x_2} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1(1, -2, 4, 7) + \lambda_2(0, 3, 15, 8) = (0, 0, 0, 0)$

$(\lambda_1, -2\lambda_1 + 3\lambda_2, 4\lambda_1 + 15\lambda_2, 7\lambda_1 + 8\lambda_2) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ Άρα τα $\vec{x_1}, \vec{x_2}$ ΓΑ

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 15 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ έχει μη-μηδενική ορίζουσα ίση με 3

Άρα θέτοντας $\vec{x_3} = (0, 0, 1, 0)$, $\vec{x_4} = (0, 0, 0, 1)$ έπεται ότι το σύνολο $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \vec{x_4}\}$ βάση του $\mathbb{R}^4$

ΑΣΚΗΣΗ $\vec{x_1} = (1,2,3,4)$ Να βρεθεί μια βάση του $<\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \vec{x_4}>$

$\vec{x_2} = (0,1,2,3)$

$\vec{x_3} = (1,-1,-1,1)$

$\vec{x_4} = (1,3,3,1)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$ Πράξεις στις γραμμές. Τότε $<\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \vec{x_4}>$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Θέτοντας $\vec{x_1}' = (1,0,0,1)$ $= <\vec{x_1}', \vec{x_2}', \vec{x_3}'>$

$\vec{x_2}' = (0,1,0,-3)$

$\vec{x_3}' = (0,0,1,3)$

$\lambda_1 \vec{x_1}' + \lambda_2 \vec{x_2}' + \lambda_3 \vec{x_3}' = 0 \Rightarrow \lambda_1(1,0,0,1) + \lambda_2(0,1,0,-3) + \lambda_3(0,0,1,3) = (0,0,0,0)$

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1 - 3\lambda_2 + 3\lambda_3) = (0,0,0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow \vec{x_1}', \vec{x_2}', \vec{x_3}'$ Γ.Α

και άρα βάση του $<\vec{x_1}', \vec{x_2}', \vec{x_3}'> = <\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \vec{x_4}>$

ΑΣΚΗΣΗ Έστω $\vec{x_1} = (1,1,1,\alpha)$

$\vec{x_2} = (1,0,1,b) \in \mathbb{R}^4$ όπου $\alpha, b, c \in \mathbb{R}$ Να βρεθεί

$\vec{x_3} = (-2,2,-2,c)$ μια βάση του $<\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}>$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & 1 & b \\ -2 & 2 & -2 & c \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{στις γραμμές}]{\text{πράξεις}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \alpha - b \\ 0 & 0 & 0 & c - 2\alpha + b \end{pmatrix}$$

① Αν $c - 2\alpha + b \neq 0$. Τότε η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του A είναι η

$$A' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & \alpha - b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Θέτουμε

$\vec{x_1}' = (1,0,1,b)$ Τότε: $<\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}>$

$\vec{x_2}' = (0,1,0,\alpha - b)$ $= <\vec{x_1}', \vec{x_2}', \vec{x_3}'>$

$\vec{x_3}' = (0,0,0,1)$

$\lambda_1 \vec{x_1}' + \lambda_2 \vec{x_2}' + \lambda_3 \vec{x_3}' = \vec{0}$

$\Rightarrow \lambda_1(1,0,1,b) + \lambda_2(0,1,0,\alpha - b) + \lambda_3(0,0,0,1) = (0,0,0,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_1 b + \lambda_2(\alpha - b) + \lambda_3) = (0,0,0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow \{\vec{x_1}', \vec{x_2}', \vec{x_3}'\}$: ΓΑ και άρα είναι βάση του $<\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}>$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & \alpha-b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ Θέτοντας $\vec{x_4}' = (0,0,1,0)$, η τετράδα $\{\vec{x_1}', \vec{x_2}', \vec{x_3}', \vec{x_4}'\}$: Βάση του $\mathbb{R}^4$

② Αν $c-2\alpha+b=0$ τότε $A \underset{\text{στις γραμμές}}{\overset{\text{πράξεις}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \alpha-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Τότε όπως και πριν

Θέτοντας $\vec{x_1}' = (1,1,1,\alpha)$ Τότε $\langle \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3} \rangle = \langle \vec{x_1}', \vec{x_2}' \rangle$
$\vec{x_2}' = (0,1,0,\alpha-b)$

Εύκολα τα $\vec{x_1}', \vec{x_2}'$ Γ.Α και άρα Βάση του $\langle \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3} \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \alpha-b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ΑΛΛΑΓΗ ΒΑΣΗΣ

Εστω E: $\mathbb{K}$-δ.χ με $\dim_{\mathbb{K}} E = n$ Εστω $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots \vec{e_n}\}$ Βάση του E
$B' = \{\vec{e_1}', \vec{e_2}', \dots, \vec{e_n}'\}$ Βάση του E

$$\begin{cases} \vec{e_1}' = \alpha_{11}\vec{e_1} + \alpha_{21}\vec{e_2} + \dots + \alpha_{n1}\vec{e_n} \\ \vdots \\ \vec{e_n}' = \alpha_{1n}\vec{e_n} + \alpha_{2n}\vec{e_2} + \dots + \alpha_{nn}\vec{e_n} \end{cases}$$

Ο πίνακας μετάβασης από την Βάση B στην Βάση B' ορίζεται να είναι ο

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{2n} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Παρόμοια ορίζεται ο πίνακας μετάβασης Q από τη B' στην B

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ποια είναι η σχέση των πινάκων P, Q;

Εστω $\vec{x} \in E$ Τότε: $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n}$
$\vec{x} = x_1'\vec{e_1}' + \dots + x_n'\vec{e_n}'$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ (ΘΕΔ) Εστω $f: E \to F$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου E, F: K-δ.χ και $\dim_{IK} E < \infty$ Τότε:

$$\boxed{\dim_{IK} E = \dim_{IK} Ker(f) + \dim_{IK} Im(f)} \; *$$

Απόδειξη: Επειδή $\dim_{IK} E < \infty$, έπεται ότι $\dim_{IK} Ker(f) < \infty$, διότι ο $Ker(f)$ είναι υπόχωρος του E. Εστω $B = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$: Βάση του E. Τότε: $Im(f) = \langle f(\vec{e_1}), \dots f(\vec{e_2}) \rangle$ Προφανώς $\langle f(\vec{e_1}), \dots f(\vec{e_2}) \rangle \subseteq Im(f)$, διότι $f(\vec{e_1}), \dots f(\vec{e_n}) \in Im(f)$ και η $Im(f)$: υπόχωρος του F. Εστω $\vec{y} \in Im(f)$ Τότε: $\exists \vec{x} \in E: f(\vec{x}) = \vec{y}$ Όμως B: Βάση του $E \Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in IK$ $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n}$ Τότε $\vec{y} = f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e_1}) + \dots + x_n f(\vec{e_n}) \in \langle f(\vec{e_1}), \dots, f(\vec{e_n}) \rangle$ Αρα ~~Im(f) ⊆~~ $Im(f) \subseteq \langle f(\vec{e_1}), \dots, f(\vec{e_n}) \rangle$ Αρα $Im(f) = \langle f(\vec{e_1}), \dots, f(\vec{e_2}) \rangle$
$\Rightarrow$ ο $Im(f)$ πεπερασμένα παραγώμενος $\Rightarrow \dim_{IK} Im(f) < \infty$
Εστω $C = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_k}\}$ Βάση του $Ker(f)$ Γνωρίζουμε τότε η Βάση C συμπληρώνεται σε μιά Βάση $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_{k+1}}, \dots \vec{e_n}\}$: του E

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ Το σύνολο $D = \{f(\vec{e_{k+1}}), \dots f(\vec{e_n})\}$ Βάση της $Im(f)$

Αποδ. του ισχυρισμού: Δείξαμε ότι $Im(f) = \langle f(\vec{e_1}), \dots f(\vec{e_k}), f(\vec{e_{k+1}}), \dots f(\vec{e_n}) \rangle$ Επειδή $\vec{e_1}, \dots \vec{e_k} \in ker(f) \Rightarrow f(\vec{e_1}) = \dots = f(\vec{e_k}) = \vec{0}$ και άρα
$Im(f) = \langle f(\vec{e_{k+1}}), \dots, f(\vec{e_n}) \rangle$ ①
Εστω ότι: $\lambda_{k+1} f(\vec{e_{k+1}}) + \dots + \lambda_n f(\vec{e_n}) = \vec{0} \Rightarrow f(\lambda_{k+1}\vec{e_{k+1}} + \dots + \lambda_n\vec{e_n}) = \vec{0} \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda_{k+1}\vec{e_{k+1}} + \dots + \lambda_n\vec{e_n} \in Ker(f)$. Επειδή το σύνολο $\{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_k}\}$ Βάση του $Ker(f) \Rightarrow \exists x_1, \dots, x_k \in IK: \lambda_{k+1}\vec{e_{k+1}} + \dots + \lambda_n\vec{e_n} = x_1\vec{e_1} + \dots + x_k\vec{e_k} \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1\vec{e_1} + \dots + x_k\vec{e_k} + (-\lambda_{k+1})\vec{e_{k+1}} + \dots + (-\lambda_n)\vec{e_n} = \vec{0}$ Επειδή το σύνολο $\{\vec{e_1}, \dots \vec{e_k}, \vec{e_{k+1}}, \dots \vec{e_n}\}$: Βάση του E, έπεται ότι $x_1 = \dots = x_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n$
Αρα το σύνολο $\{f(\vec{e_{k+1}}), \dots, f(\vec{e_n})\}$: Γ.Α ② Απο τις ① κ' ② $\Rightarrow$ Ισχυρισμός
$\dim_{IK} Ker(f) + \dim_{IK} Im(f) = |C| + |D| = k + n - k = n = |B| = \dim_{IK} E$ ⊛

ΟΡΙΣΜΟΣ Αν $f: E \to F$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε η Βαθμίδα της f ορίζεται να είναι ο αριθμός: $\boxed{r(f) = \dim_{IK} Im(f)}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Εστω $f: E \to F$ μιά γραμμική απεικόνιση, και $\dim_{IK} E < \infty$ $\dim_{IK} F < \infty$. Τότε: $r(f) \leq \min\{\dim_{IK} E, \dim_{IK} F\}$

• $Im(f)$: υποχώρος του $F \Rightarrow r(f) = \dim_{\mathbb{K}} Im(f) \leq \dim_{\mathbb{K}} F$

• (ΘΕΔ) $\Rightarrow r(f) = \dim_{\mathbb{K}} E - \dim_{\mathbb{K}} Ker(f) \leq \dim_{\mathbb{K}} E$

$r(f) \leq \dim_{\mathbb{K}} \{\dim_{\mathbb{K}} E, \dim_{\mathbb{K}} F\}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Έστω $f: E \to F$ γραμμική απεικόνιση και $\begin{cases} \dim_{\mathbb{K}} E < \infty \\ \dim_{\mathbb{K}} F < \infty \end{cases}$

① $r(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$, δηλαδή η f είναι η μηδενική γραμμική απεικόνιση.

② Η f: επιμορφισμός $\Leftrightarrow r(f) = \dim_{\mathbb{K}} F$

③ Η f: μονομορφισμός $\Leftrightarrow r(f) = \dim_{\mathbb{K}} E$

④ Η f: ισομορφισμός $\Leftrightarrow r(f) = \dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} F$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x+y+z, x+2y-z, 2x+3y)$

Εύκολα βλέπουμε ότι η f είναι γραμμική. Θα υπολογίσουμε $\dim_{\mathbb{K}} Ker(f), r(f)$

$(x,y,z) \in Ker(f) \Leftrightarrow f(x,y,z) = \vec{0} \Leftrightarrow (x+y+z, x+2y-z, 2x+3y) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y-z=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases} \Rightarrow y-2z=0 \Rightarrow y=2z$, $\Rightarrow 2x+6z=0 \Rightarrow x+3z=0 \Rightarrow x=-3z$

Άρα: $(x,y,z) \in Ker(f) \Leftrightarrow (x,y,z) = (-3z, 2z, z)$

Άρα $Ker(f) = \{(-3z, 2z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} = \langle(-3,2,1)\rangle$

Άρα το $\{(-3,2,1)\}$ βάση του $Ker(f) \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} Ker(f) = 1$

(ΘΕΔ): $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = \dim_{\mathbb{R}} Ker(f) + r(f) \Rightarrow 3 = 1 + r(f) \Rightarrow r(f) = 2$

$\{(-3,2,1)\}$ βάση του $Ker(f)$. Συμπληρώνουμε το $(-3,2,1)$ σε μια βάση του $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \{(-3,2,1),(0,1,0),(0,0,1)\}$$ βάση του $\mathbb{R}^3$

Τότε το σύνολο $\{f(0,1,0), f(0,0,1)\}$: βάση της $Im(f)$ και: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$f(0,1,0) = (1,2,3)$ Άρα $\{(1,2,3),(1,-1,0)\}$ βάση της $Im(f)$

$f(0,0,1) = (1,-1,0)$ και τότε $\{(1,2,3),(1,-1,0),(1,0,0)\}$ βάση του $\mathbb{R}^3$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν V, W: υπόχωροι του $\mathbb{K}$-δ.χ E και $\dim_{\mathbb{K}} E < \infty$ τότε:

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}}(V+W) = \dim_{\mathbb{K}} V + \dim_{\mathbb{K}} W - \dim_{\mathbb{K}}(V \cap W)} \; *$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τον $\mathbb{K}$-δ.χ $V \times W = \{(\vec{x},\vec{y}) \mid \vec{x} \in V, \vec{y} \in W\}$ και τότε γνωρίζουμε ότι: $\dim(V \times W) = \dim_{\mathbb{K}} V + \dim_{\mathbb{K}} W$. Ορίζουμε απεικόνιση

$$f: V \times W \to V + W, \quad f(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x} + \vec{y}$$

$f[(\vec{x_1},\vec{y_1}) + (\vec{x_2},\vec{y_2})] = f[(\vec{x_1}+\vec{x_2}) + (\vec{y_1}+\vec{y_2})] = \vec{x_1} + \vec{x_2} + \vec{y_1} + \vec{y_2} = (\vec{x_1}+\vec{y_1}) + (\vec{x_2}+\vec{y_2}) =$
$= f(\vec{x_1},\vec{y_1}) + f(\vec{x_2},\vec{y_2})$

- $f(\lambda(\vec{x},\vec{y})) = f(\lambda \cdot \vec{x}, \lambda\vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y} = \lambda(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda f(\vec{x},\vec{y})$

f: γραμμική

(ΘΕΔ) $\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}}(V \times W) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) \Longrightarrow$

$\dim_{\mathbb{K}} V + \dim_{\mathbb{K}} W = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f)$

Η f είναι επιμορφισμός διότι $\forall \vec{x}+\vec{y} \in V+W, \exists (\vec{x},\vec{y}) \in V \times W: f(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}+\vec{y}$

Άρα $\mathrm{Im}(f) = V+W$ και τότε $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) = \dim_{\mathbb{K}}(V+W)$ Επομένως

$\dim_{\mathbb{K}} V + \dim_{\mathbb{K}} W = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}}(V+W)$

$\mathrm{Ker}(f) = \{(\vec{x},\vec{y}) \in V \times W \mid f(\vec{x},\vec{y}) = \vec{0}\} = \{(\vec{x},\vec{y}) \in V \times W \mid \vec{x}+\vec{y} = \vec{0}\} =$
$= \{(\vec{x},\vec{y}) \in V \times W \mid \vec{y} = -\vec{x}\} = \{(\vec{x},-\vec{x}) \in V \times W \mid \vec{x} \in V \cap W\}$

Απόδειξη: Ορίζουμε απεικόνιση

$h: V \cap W \to \mathrm{Ker}(f), \; h(\vec{x}) = (\vec{x}, -\vec{x})$ η οποία από τον τύπο της εύκολα είναι γραμμική, και επιπλέον:

$\mathrm{Ker}(h) = \{\vec{x} \in V \cap W \mid h(\vec{x}) = (\vec{0},\vec{0})\} = \{\vec{x} \in V \cap W \mid (\vec{x},-\vec{x}) = (\vec{0},\vec{0})\} = \{\vec{0}\}$

$\Rightarrow h$: μονομορφισμός. Επίσης η h επιμορφισμός, διότι $\forall (\vec{x},-\vec{x}) \in \mathrm{Ker}(f)$: $h(\vec{x}) = (\vec{x},-\vec{x})$ Άρα h ισομορφισμός $\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) = \dim_{\mathbb{K}}(V \cap W)$ ⓠ

ΘΕΩΡΗΜΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΕΠΕΚΤΑΣΗΣ (ΘΓΕ) Έστω E: $\mathbb{K}$-δ.χ και $B: \{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}\}$ και έστω F: $\mathbb{K}$-δ.χ και $\{\vec{\omega_1}, \ldots, \vec{\omega_n}\} \subseteq F$

Τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f: E \to F$ έτσι ώστε:

$$f(\vec{e_i}) = \vec{\omega_i} \quad 1 \le i \le n$$

Απόδειξη: $\forall \vec{x} \in E$: $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \ldots + x_n\vec{e_n}$ (μοναδική γραφή), διότι B: Βάση του E. Ορίζουμε $f: E \to F$, $f(\vec{x}) = x_1\vec{\omega_1} + \ldots + x_n\vec{\omega_n}$

"Ο ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΙΑΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ"

Έστω E, F: Κδ.χ και $f: E \to F$ μια γραμμική απεικόνιση.

Έστω $\begin{cases} B_E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\} : \text{Βάση του } E \\ B_F = \{\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \dots, \vec{\varepsilon_m}\} \text{ Βάση του } F \end{cases}$

$$\begin{cases} f(\vec{e_1}) = \alpha_{11}\vec{\varepsilon_1} + \alpha_{21}\vec{\varepsilon_2} + \dots + \alpha_{m1}\vec{\varepsilon_m} \\ \vdots \\ f(\vec{e_n}) = \alpha_{1n}\vec{\varepsilon_1} + \alpha_{2n}\vec{\varepsilon_2} + \dots + \alpha_{mn}\vec{\varepsilon_m} \end{cases}$$

$$\boxed{f(\vec{e_j}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\vec{\varepsilon_i} \qquad 1 \le j \le n}$$

$$M_{B_E}^{B_F}(f) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας $M_{B_E}^{B_F}(f)$ καλείται <u>ο πίνακας της f ως προς τις βάσεις</u> B_E και B_F. Αν $E = F$, τότε ο πίνακας $M_{B_E}^{B_E}(f)$ καλείται <u>ο πίνακας της f ως προς την βάση B_E</u>

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> η $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $f(x,y,z) = (x+2y,\ y-z,\ x+2z)$

$B = \{\vec{e_1} = (1,0,0),\ \vec{e_2} = (0,1,0),\ \vec{e_3} = (0,0,1)\}$

$B' = \{\vec{\varepsilon_1} = (0,1,1),\ \vec{\varepsilon_2} = (1,0,1),\ \vec{\varepsilon_3} = (1,1,0)\}$

$M_B^{B'}(f)$, $M_{B'}^{B}(f)$
$M_B^B(f)$, $M_{B'}^{B'}(f)$

① $M_B^{B'}(f) = ;$

$f(\vec{e_1}) = f(1,0,0) = (1,0,1) = 0\cdot\vec{\varepsilon_1} + 1\cdot\vec{\varepsilon_2} + 0\cdot\vec{\varepsilon_3}$

$f(\vec{e_2}) = f(0,1,0) = (2,1,0) = \alpha\vec{\varepsilon_1} + \beta\vec{\varepsilon_2} + \gamma\vec{\varepsilon_3} = \alpha(0,1,1) + \beta(1,0,1) + \gamma(1,1,0)$

$= (\beta+\gamma, \alpha+\gamma, \alpha+\beta) \Longrightarrow \begin{cases} \beta+\gamma = 2 \\ \alpha+\gamma = 1 \\ \alpha+\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2},\ \beta = \frac{1}{2},\ \gamma = \frac{3}{2}$

Άρα το $\boxed{f(\vec{e_2}) = -\frac{1}{2}\vec{\varepsilon_1} + \frac{1}{2}\vec{\varepsilon_2} + \frac{3}{2}\vec{\varepsilon_3}}$

$f(\vec{e_3}) = f(0,0,1) = (0,-1,2) \Rightarrow \boxed{f(\vec{e_3}) = \frac{1}{2}\vec{\varepsilon_1} + \frac{3}{2}\vec{\varepsilon_2} - \frac{3}{2}\vec{\varepsilon_3}}$

$$\boxed{M_B^{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \end{pmatrix}}$$

② $M_{B'}^{B}(f) = ;$

$f(\vec{\varepsilon_1}) = f(0,1,1) = (2,0,2) = 2\vec{e_1} + 0\cdot\vec{e_2} + 2\vec{e_3}$

$f(\vec{\varepsilon_2}) = f(1,0,1) = (1,-1,3) = 1\vec{e_1} - 1\vec{e_2} + 3\vec{e_3}$

$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$

$f(\vec{\varepsilon_1}) = f(0,1,1) = (2,0,2) = 2\vec{e_1} + 0\vec{e_2} + 2\vec{e_3}$

$f(\vec{\varepsilon_2}) = f(1,0,1) = (1,-1,3) = 1\vec{e_1} - 1\vec{e_2} + 3\vec{e_3}$

$f(\vec{\varepsilon_3}) = f(1,1,0) = (3,1,1) = 3\vec{e_1} + 1\vec{e_2} + 1\vec{e_3}$

$$\boxed{M_{B'}^{B}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}$$

③ $M_B^B(f) = ;$

$f(\vec{e_1}) = (1,0,1) = 1\vec{e_1} + 0\cdot\vec{e_2} + 1\vec{e_3}$

$f(\vec{e_2}) = (2,1,0) = 2\vec{e_1} + 1\vec{e_2} + 0\vec{e_3}$

$f(\vec{e_3}) = (0,-1,2) = 0\vec{e_1} - 1\vec{e_2} + 2\vec{e_3}$

$$\boxed{M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

④ $\ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (0,0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+2z, y-z, x+2z) = (0,0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{matrix} x+2z=0 \\ y-z=0 \\ x+2z=0 \end{matrix}\}$

$= \{(-2z, z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R} \mid z\in\mathbb{R}\} = \{z(-2,1,1) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$ Άρα

$\ker(f) = \langle(-2,1,1)\rangle$ Άρα το διάνυσμα $\vec{e_1}' = (-2,1,1)$: Βάση του $\ker(f)$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$$

Θέτοντας $\vec{e_2}' = (0,1,0)$, $\vec{e_3}' = (0,0,1)$ έπεται ότι $B = \{\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}'\}$: Βάση του $\mathbb{R}^3$

Γνωρίζουμε ~~έτσι~~ τότε ότι $\{f(\vec{e_2}'), f(\vec{e_3}')\}$: Βάση της $Im(f)$ Τότε $f(\vec{e_2}) = (2,1,0)$ $f(\vec{e_3}) = (0,-1,2)$ Συμπληρώνουμε τα διανύσματα $f(\vec{e_2}') = \vec{\varepsilon_2}$ $f(\vec{e_3}') = \vec{\varepsilon_3}'$ σε μια Βάση του $\mathbb{R}^3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow B' = \{\vec{e_1}' = (1,0,0), \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3}'\}$$

$M_B^{B'}(f) = ;$

$f(\vec{e_1}') = \vec{0}\,\vec{\varepsilon_1}' + 0\cdot\vec{\varepsilon_2}' + 0\vec{\varepsilon_3}'$

$f(\vec{e_2}') = \vec{\varepsilon_2}' = 0\vec{\varepsilon_1}' + 1\cdot\vec{\varepsilon_2}' + 0\vec{\varepsilon_3}'$

$f(\vec{e_3}') = \vec{\varepsilon_2}' = 0\vec{\varepsilon_1}' + 0\vec{\varepsilon_2}' + 1\vec{\varepsilon_2}'$

$$\Rightarrow \boxed{M_B^{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ① Γενικά: $M_{B_E}^{B_F}(f) \neq M_{B'_E}^{B'_F}(f)$

Παρόμοια αν $E=F$ τότε $M_{B_E}^{B_F}(f) \neq M_{B_F}^{B_E}(f)$

② Έστω $f, g: E \to F$ γραμμικές απεικονίσεις και $\begin{cases} B_E = \{\vec{e_1}, \dots \vec{e_n}\} : \text{Βάση του } E \\ B_F = \{\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_m}\} \text{ Βάση του } F \end{cases}$

Τότε $M_{B_E}^{B_F}(f) = M_{B_E}^{B_F}(g) \Leftrightarrow f = g$

$$\boxed{\begin{aligned} f(\vec{e_j}) &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\vec{\varepsilon_i} \quad 1 \le j \le n \\ g(\vec{e_j}) &= \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij}\vec{\varepsilon_i} \end{aligned}}$$

$M_{B_E}^{B_F}(f) = A = (\alpha_{ij})$, $M_{B_E}^{B_F}(g) = B = (\beta_{ij})$

Αν $M_{B_E}^{B_F} = M_{B_E}^{B_F}(g) \Rightarrow A = (\alpha_{ij}) = (\beta_{ij}) = B \Rightarrow \alpha_{ij} = \beta_{ij}$ $\quad 1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ $\Rightarrow$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} f(\vec{e_j}) = g(\vec{e_j})$, $1 \le j \le n \Rightarrow f = g$

③ $O: E \to F$ $\quad O(\vec{x}) = \vec{0}$: η μηδενική γραμμική απεικόνιση

Τότε $M_{B_E}^{B_F}(0) = O$ ο μηδενικός $m \times n$ πίνακας)

Έστω $E = F$ και $Id_E: E \to E$ $\quad Id_E(\vec{x}) = \vec{x}$

$M_{B_E}^{B_F}(Id_E)$: $Id(\vec{e_1}) = \vec{e_1} = \alpha_{11}\vec{\varepsilon_1} + \alpha_{21}\vec{\varepsilon_2} + \dots + \alpha_{m1}\vec{\varepsilon_m}$

$\vdots$

$Id_E(\vec{e_n}) = \vec{e_n} = \alpha_{1m}\vec{\varepsilon_1} + \alpha_{2m}\vec{\varepsilon_2} + \dots + \alpha_{mn}\vec{\varepsilon_m}$

$M_{B_E}^{B_F}(Id_E) = M_{B_F}^{B_E}$

Προφανώς για βάση B του E: $M_B^B(Id_E) = I_n$: ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας

διότι:

$$\left.\begin{aligned} Id_E(\vec{e_1}) &= \vec{e_1} = 1\vec{e_1} + 0\vec{e_2} + \dots + 0\vec{e_n} \\ &\vdots \\ Id_E(\vec{e_n}) &= \vec{e_n} = 0\vec{e_1} + 0\vec{e_2} + \dots + 1\vec{e_n} \end{aligned}\right| \Rightarrow M_B^B(Id_E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

Γενικά όμως αν B, C βάσεις του E τότε: $M_B^C(Id_E) \neq I_n$

Παράδειγμα στον $\mathbb{R}^3$ $\quad B: \{\vec{e_1} = (1,0,0), \vec{e_2} = (0,1,0), \vec{e_3} = (0,0,1)\}$

$C: \{\vec{\varepsilon_1} = (0,1,1), \vec{\varepsilon_2} = (1,0,1), \vec{\varepsilon_3} = (1,1,0)\}$

09/01/2018

Τότε $M_C^B(I_{d\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ και $M_B^C(I_{d\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

4) Αν γνωρίζουμε τον πίνακα $M_{B_E}^{B_F}(f)$ της f ως προς ένα ζευγάρι βάσεων B_E, B_F, τότε γνωρίζουμε την f.

$M_{B_E}^{B_F}(f) = A = (\alpha_{ij})$ και γνωρίζουμε τον πίνακα $A = (\alpha_{ij})$. Τότε όμως από τις σχέσεις (*) $\Rightarrow$ γνωρίζουμε τις τιμές $f(\vec{e_j})$ της f στην βάση $B_E = \{e_1, \dots, e_n\}$. Όμως $\forall \vec{x} \in E : \vec{x} = x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n} \Rightarrow$

$f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e_1}) + \dots + x_n f(\vec{e_n}) \Rightarrow$ γνωρίζουμε την f.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Να βρεθεί η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ της οποίας ο πίνακας ως προς το ζευγάρι βάσεων:

$B = \{\vec{\varepsilon_1} = (0,1,1), \vec{\varepsilon_2} = (1,0,1), \vec{\varepsilon_3} = (1,1,0)\}$ είναι ο $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$C = \{\vec{n_1} = (1,1,0), \vec{n_2} = (2,0,-1), \vec{n_3} = (0,1,-1)\}$

$$\left.\begin{aligned} f(\vec{\varepsilon_1}) &= 1\vec{n_1} + 2\vec{n_2} + 0\vec{n_3} = (5,1,-2) \\ f(\vec{\varepsilon_2}) &= 2\vec{n_1} + 1\vec{n_2} + 1\vec{n_3} = (4,3,-2) \\ f(\vec{\varepsilon_3}) &= 3\vec{n_1} + 7\vec{n_2} - \vec{n_3} = (17,2,-6) \end{aligned}\right\}$$

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \alpha\vec{\varepsilon_1} + \beta\vec{\varepsilon_2} + \gamma\vec{\varepsilon_3}$

$\alpha(0,1,1) + \beta(1,0,1) + \gamma(1,1,0) =$

$= (\beta+\gamma, \alpha+\gamma, \alpha+\beta) \Rightarrow$

$$\left\{\begin{aligned} \beta + \gamma &= x \\ \alpha + \gamma &= y \\ \alpha + \beta &= z \end{aligned}\right. \Rightarrow \alpha = \frac{-x+y+z}{2}, \ \beta = \frac{x-y+z}{2}, \ \gamma = \frac{x+y-z}{2}$$

Άρα: $(x,y,z) = \boxed{\frac{-x+y+z}{2}}\vec{\varepsilon_1} + \boxed{\frac{x-y+z}{2}}\vec{\varepsilon_2} + \boxed{\frac{x+y-z}{2}}\vec{\varepsilon_3}$

$f(x,y,z) = \frac{-x+y+z}{2} f(\vec{\varepsilon_1}) + \frac{x-y+z}{2} f(\vec{\varepsilon_2}) + \frac{x+y-z}{2} f(\vec{\varepsilon_3}) =$

$= \frac{-x+y+z}{2}(5,1,-2) + \frac{x-y+z}{2}(4,3,-2) + \frac{x+y-z}{2}(17,2,-6) =$

$= (8x+9y-4z, 2x+z, -3x-3y+z)$

Scanned by CamScanner

Αν E, F: $\mathbb{K}$-δ.χ τότε: $\mathcal{L}(E,F) = \{f: E \to F \mid f$: γραμμική απεικόνιση$\}$

Το σύνολο $\mathcal{L}(E,F)$ είναι $\mathbb{K}$-δ.χ με πράξεις

$(f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x})$ και $(\lambda \cdot f)(\vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x})$

Έχουμε και το $\mathbb{K}$-δ.χ $M_{m\times n}(\mathbb{K})$

ΘΕΩΡΗΜΑ Εστω E, F: $\mathbb{K}$-δ.χ και $\dim_{\mathbb{K}} E = n$, $\dim_{\mathbb{K}} F = m$

Εστω B_E: Βάση του E και B_F Βάση του F. Τότε η απεικόνιση

$M: \mathcal{L}(E,F) \to M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $f \longmapsto M(f) \underset{\text{ορ}}{=\!=} M^{B_F}_{B_E}(f)$

είναι ισομορφισμός $\mathbb{K}$-δ.χ

10/01/2018

~~ΘΕΩΡΗΜ~~ **ΘΕΩΡΗΜΑ** Εστω E, F: $\mathbb{K}$-δ.χ και $\dim_{\mathbb{K}} E = n$, $\dim_{\mathbb{K}} F = m$

Εστω $B_E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots \vec{e}_n\}$: Βάση του E

$B_F = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3, \ldots \vec{\varepsilon}_n\}$: Βάση του F Τότε η απεικόνιση

$M: \mathcal{L}(E,F) \to M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $f \longmapsto M(f) = M^{B_F}_{B_E}(f)$ ο πίνακας της f ως προς τις βάσεις B_E, B_F

είναι ισομορφισμός

Απόδειξη Εστω $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ και $\lambda \in \mathbb{K}$ Εστω:

$A = (\alpha_{ij}) = M^{B_F}_{B_E}(f)$ όπου: $f(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \vec{\varepsilon}_i$, $1 \le j \le n$

$B = (\beta_{ij}) \in M^{B_F}_{B_E}(g)$, όπου: $g(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} \vec{\varepsilon}_i$, $1 \le j \le n$

$\forall j = 1, \ldots, n$ $(f+g)(\vec{e}_j) = f(\vec{e}_j) + g(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \vec{\varepsilon}_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} \vec{\varepsilon}_i = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) \vec{\varepsilon}_i$

Άρα $M^{BF}_{BE}(f+g) = (\gamma_{ij})$ και: $\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$ Επομένως $M^{B_F}_{B_E}(f+g) = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})$
$= (\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) = M^{B_F}_{B_E}(f) + M^{B_F}_{B_E}(g) \Rightarrow M(f+g) = M(f) + M(g)$ ①

$\forall j = 1, \ldots, n$: $(\lambda \cdot f)(\vec{e}_j) = \lambda f(\vec{e}_j) = \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \vec{\varepsilon}_i = \sum_{i=1}^{m} (\lambda \alpha_{ij}) \vec{\varepsilon}_i$ Άρα

ο πίνακας $M^{B_F}_{B_E}(\lambda \cdot f) = (\lambda \alpha_{ij}) = \lambda(\alpha_{ij}) = \lambda M^{B_F}_{B_E}(f) \Rightarrow M(\lambda f) = \lambda \cdot M(f)$ ②

①, ② $\Rightarrow$ Η απεικόνιση M είναι γραμμική

Απόδειξη Έχουμε δείξει ότι: $\forall f, g \in \mathcal{L}(E,F)$: $M^{B_F}_{B_E}(f) = M^{B_F}_{B_E}(g) \Rightarrow f = g$

$\Rightarrow$ η απεικόνιση M είναι 1-1 και άρα η M: μονομορφισμός

Μένει να δείξουμε ότι η M είναι επιμορφισμός.

Scanned by CamScanner

Έστω $A=(\alpha_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Θεωρούμε τα διανύσματα

$\vec{e}_1 \in E \;\ldots\; \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\vec{\varepsilon}_i \in F$

$\vdots$

$\vec{e}_n \in E \;\ldots\; \sum_{i=1}^{m} \alpha_{in}\vec{\varepsilon}_i \in F$

Από το Θεώρημα Γραμμικής επέκτασης έπεται ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f: E \to F$ έτσι ώστε

$f(\vec{e}_1) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\vec{\varepsilon}_i$

$\vdots$

$f(\vec{e}_n) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{in}\vec{\varepsilon}_i$

δηλαδή $f(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\vec{\varepsilon}_i$, $1 \le j \le n$

Άρα η M είναι επιμορφισμός

Επομένως η M είναι ισομορφισμός

Πόρισμα Αν E, F: $\mathbb{K}$-δ.χ πεπερασμένης διάστασης, τότε ο $\mathbb{K}$-δ.χ $\mathcal{L}(E,F)$ έχει πεπερασμένη διάσταση και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(E,F) = \dim_{\mathbb{K}} E \cdot \dim_{\mathbb{K}} F$

Απόδειξη $\mathcal{L}(E,F) \cong M_{m\times n}(\mathbb{K})$, όπου $m = \dim_{\mathbb{K}} F$, $n = \dim_{\mathbb{K}} E$

Επειδή ισόμορφοι $\mathbb{K}$-δ.χ έχουν την ίδια διάσταση $\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(E,F) = \dim_{\mathbb{K}} M_{m\times n}(\mathbb{K}) = n\cdot m$

(Το σύνολο πινάκων $\{E_{ij}\}_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ όπου

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \\ \\ i\text{-γραμμή} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\uparrow j\text{-στήλη}$$

είναι μια βάση του $M_{m\times n}(\mathbb{K})$)

ΑΣΚΗΣΗ Να βρεθεί μια βάση του $\mathcal{L}(E,F)$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ Θεωρείστε τις γραμμικές απεικονίσεις $M^{-1}(E_{ij})$, $\begin{matrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{matrix}$

Εφαρμογή Έστω $A=(\alpha_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Τότε ορίζεται η γραμμική απεικόνιση $f_A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f_A(X) = A\cdot X$

Έστω $B = \{ E_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ldots E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \}$: κανονική βάση του $\mathbb{K}^n$

$C = \{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \ldots E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \}$: κανονική βάση του $\mathbb{K}^m$

Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$

① Σχηματίζουμε τον $n \times 2n$-πίνακα $(A|I_n)$

② Βρίσκουμε την ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του $(A|I_n)$, η οποία θα είναι της μορφής: $(B|A')$

③ $\begin{cases} \text{Αν } B \neq I_n \text{, τότε ο } A \text{ δεν είναι αντιστρέψιμος} \\ \text{Αν } B = I_n \text{, τότε ο } A \text{ είναι αντιστρέψιμος και } A^{-1} = A' \end{cases}$

Αν $B = I_n$, τότε υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \dots, E_p$:

$E_p E_{p-1} \dots E_2 \cdot E_1 = I_n$ και τότε $A^{-1} = E_p \cdot E_{p-1} \dots E_2 \cdot E_1$

Ένα γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους $x_1, x_2 \dots x_n$ είναι της μορφής:

$$(\Sigma)\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = b_1 & (\Sigma_1) \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots \alpha_{2n}x_n = b_2 & (\Sigma_2) \\ \vdots & \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots \alpha_{mn}x_n = b_m & (\Sigma_3) \end{cases}$$

όπου $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$

$b_i \in \mathbb{K}$, $1 \le i \le m$

Τα $x_1, x_2 \dots x_n$ καλούνται οι άγνωστοι του (Σ)

Τα α_{ij} καλούνται συντελεστές του (Σ)

Τα b_i καλούνται σταθεροί όροι του (Σ)

Τότε: (Σ) $A \cdot X = B$

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$

$X \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$

$B \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$

1. Το (Σ) καλείται **συμβιβαστό** $\Leftrightarrow$ (αν και μόνο αν) έχει τουλάχιστον μια λύση
2. Το (Σ) καλείται **αδύνατο** $\Leftrightarrow$ δεν έχει καμία λύση
3. Το (Σ) καλείται **ομογενές** $\Leftrightarrow$ $B=0$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Κάθε ομογενές σύστημα είναι συμβιβαστό, διότι έχει πάντα τη μηδενική λύση: $x=0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$(\Sigma)\begin{cases} y+3z=-2 \\ x+2y+6z=0 \\ 2x+3y+9z=1 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} x \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix}$$

Διαδικασία λύσης του (Σ): (Μέθοδος απαλοιφής του Gauss)

① Αμοιβαία εναλλαγή δύο απο τις εξισώσεις του (Σ): $(\Sigma_i) \leftrightarrow (\Sigma_j)$

② Πολλαπλασιάζουμε μια απο τις εξισώσεις του Σ με ένα $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$: $(\Sigma_i) \longmapsto (\lambda \Sigma_i)$

③ Προσθέτουμε σε μια εξίσωση πολλαπλάσιο μιας άλλης : $(\Sigma_i) \mapsto (\Sigma_i) + (\lambda \Sigma_j)$

Πρόταση: Έστω (Σ): $A \cdot X = B$, $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$

Αν $M \in M_m(\mathbb{K})$ είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας, και έστω το σύστημα $(\Sigma'): (M \cdot A) \cdot X = M \cdot B$ Τότε τα (Σ), (Σ') είναι ισοδύναμα

Απόδειξη: • Έστω Y: λύση του $(\Sigma) \Rightarrow A \cdot Y = B \Rightarrow M(A \cdot Y) = M \cdot B$
$\Rightarrow (M \cdot A) Y = M \cdot B \Rightarrow Y$: λύση του (Σ')

• Έστω ότι Y λύση του $(\Sigma') \Rightarrow (M \cdot A) Y = M \cdot B \Rightarrow M(A \cdot Y) = M \cdot B$
$\Rightarrow M^{-1} \cdot M(A \cdot Y) = M^{-1} \cdot M \cdot B \Rightarrow A \cdot Y = B \Rightarrow Y$ λύση του (Σ) ∎

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΟΥ (Σ)

Έστω (Σ) $A \cdot X = B$, $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$

1ο ΒΗΜΑ Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα $(A|B)$ του (Σ)

2ο ΒΗΜΑ Βρίσκουμε την ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή $(A|B)$, έστω αυτή είναι ο πίνακας $(A'|B')$

3ο ΒΗΜΑ Σχηματίζουμε το σύστημα: $(\Sigma'): A' \cdot X = B'$ το οποίο είναι ισοδύναμο με το (Σ) και έχει πολύ απλούστερη μορφή. Έτσι βρίσκουμε τις λύσεις του (Σ') οι οποίες είναι οι λύσεις του αρχικού (Σ)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: 1#

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -6 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \mapsto \Gamma_2 - 3\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_2 \mapsto -\frac{1}{2}\Gamma_2]{\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 - 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 + 4\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_3 \mapsto \frac{1}{5}\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_1 \mapsto \Gamma_1 - \Gamma_2]{\Gamma_2 \mapsto -\frac{1}{2}\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \mapsto \Gamma_2 - 2\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) = (A'|B')$$

Ο πίνακας $(A'|B')$ είναι επαυξημένος πίνακας του $(\Sigma'): A' \cdot X = B'$

$x_1 = 1$
$x_2 = 3$
$x_3 = -2$

και άρα η (μοναδική) λύση του (Σ) είναι η $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2# (αδύνατο σύστημα)

$$(\Sigma)\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 - \Gamma_1 \\ \Gamma_4 \mapsto \Gamma_4 - \Gamma_1}]{\Gamma_2 \mapsto \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \mapsto \frac{1}{4}\Gamma_3]{\Gamma_4 \mapsto \Gamma_4 + \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_4 \mapsto \Gamma_4 - 4\Gamma_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3# (άπειρες λύσεις)

$$(\Sigma)\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 8 & 12 & -9 & 8 \\ 4 & 6 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A|B) \xrightarrow{\text{γραμμοπράξεις}} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 0 \\ x_3 - \frac{4}{5}x_4 = 0 \end{cases}$$

Θέτουμε $x_4 = \lambda \in \mathbb{K}$ (δίνουμε αυθαίρετες τιμές στο x_4)

τότε: $x_3 = \frac{4}{5}\lambda$

$$x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\lambda\right) + \frac{1}{2}\lambda = 0$$

Θέτουμε $x_2 = \mu \in \mathbb{K}$ και τότε:

$$x_1 = -\frac{3}{2}\mu + \frac{4}{10}\lambda - \frac{5}{10}\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{3\mu}{2} + \frac{9}{10}\lambda$$

Το (Σ) έχει άπειρες λύσεις άρα

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\mu - \frac{1}{10}\lambda \\ \mu \\ 4/5\,\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

λ, μ παίρνουν αυθαίρετες τιμές από το $\mathbb{K}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα γραμμικό σύστημα

(Σ): $A\cdot X = B$ $\quad A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$

καλείται σύστημα Cramer $\Leftrightarrow$ $m=n$ και ο A: αντιστρέψιμος

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω (Σ) $A\cdot X = B$ ένα σύστημα Cramer. Τότε το (Σ) έχει μοναδική λύση, την εξής:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} \cdots \alpha_{1i-1} & B_1 & \alpha_{1i+1} \cdots \alpha_{1n} \\ \alpha_{n1} \cdots \alpha_{ni-1} & B_n & \alpha_{ni+1} \cdots \alpha_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad i=1,\dots,n$$

Ιδιαίτερα ένα ομογενές σύστημα Cramer έχει μοναδική λύση την μηδενική.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Επειδή ο A είναι αντιστρέψιμος, έπεται ότι υπάρχει ο A^{-1} και τότε: $A^{-1}\cdot(A\cdot X) = A^{-1}\cdot B \Rightarrow (A^{-1}\cdot A)\cdot X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow$

$$X = A^{-1}\cdot B$$

Άρα το (Σ) έχει μοναδική λύση την $X = A^{-1}\cdot B$

Γνωρίζουμε ότι: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A)$. Τότε: $X = \frac{1}{|A|}\cdot\operatorname{adj}(A)\cdot B$

$\Rightarrow \forall\, i=1,\dots,n$ ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα

$$x_i = \frac{1}{|A|}(\operatorname{adj}(A)\cdot B)_i = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n} A_{ki}B_k = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1i-1} & B_1 & \alpha_{1i+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{ni-1} & B_n & \alpha_{ni+1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ θεωρούμε το σύστημα:

$$(\Sigma)\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{cases}$$

Λύση:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \end{array}\right)$$

Scanned by CamScanner

1ος ΤΡΟΠΟΣ

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \mapsto \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \lambda-1 \\ \lambda+1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda+1)$$

1η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Αν $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$ τότε $|A| \neq 0 \Rightarrow$ το (Σ) σύστημα Cramer $\Rightarrow$ το (Σ) έχει μοναδική λύση την:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{vmatrix}}{-(\lambda-1)(\lambda+1)} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix}}{-(\lambda-1)(\lambda+1)} = \frac{\lambda-3}{\lambda+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \end{vmatrix}}{-(\lambda-1)(\lambda+1)} = -\frac{4}{\lambda+1}$$

2η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: $\lambda = 1$ Τότε:

$$(\Sigma) \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &2x + 2z = 4 \Rightarrow \\ &x + z = 2 \\ &y = -1 \end{aligned}$$

Τότε θέτοντας $z = \kappa \in \mathbb{R}$, θα έχουμε: $x = 2 - \kappa$, $y = -1$, $z = \kappa$ $(\kappa \in \mathbb{R})$ Το (Σ) έχει άπειρες λύσεις

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \mapsto \Gamma_2 - \Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & \lambda-3 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \mapsto \frac{1}{2}\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{\lambda-1}{2} & -1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & \lambda-3 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 - (\lambda+1)\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{\lambda-1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{2} & 2(\lambda-1) \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \mapsto \Gamma_1 + \Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{\lambda+1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{\lambda-1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{2} & 2(\lambda-1) \end{array}\right)$$

μετα συνεχίζουμε με τις περιπτώσεις

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

② Στο σύνολο V ορίζεται και η πράξη Βαθμωτού πολλαπλασιασμού αριθμού $\lambda \in \mathbb{R}$ με διάνυσμα $\vec{\alpha}$, το αποτέλεσμα είναι ένα διάνυσμα $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ και το οποίο ορίζεται ως εξής:

- το μέτρο του $\lambda \cdot \vec{\alpha} = |\lambda|$ μετρο του $\vec{\alpha}$
- τα $\vec{\alpha}, \lambda\vec{\alpha}$ έχουν την ίδια διεύθυνση
- φορά του $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ είναι η φορά του $\vec{\alpha}$ αν $\lambda > 0$ $\vec{0}$, $\lambda = 0$ αντίθετη της φοράς του $\vec{\alpha}$ αν $\lambda < 0$

Ιδιότητες Βαθμωτού Πολλαπλασιασμού

(α) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{\alpha} \in V$: $(\lambda + \mu) \cdot \vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu \cdot \vec{\alpha}$

(β) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{\alpha}, \vec{b} \in V$: $\lambda(\vec{\alpha} + \vec{b}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{b}$

(γ) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{\alpha} \in V$: $\lambda(\mu \cdot \vec{\alpha}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{\alpha}$

(δ) $\forall \vec{\alpha} \in V$: $1 \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$

Έσω V ένα τυχαίο σύνολο, και $\mathbb{K}$ ένα άλλο μη-κενό σύνολο.

Εσωτερική πράξη επι του V είναι μια απεικόνιση.

$$* : V \times V \longrightarrow V$$
$$(x, y) \longmapsto x * y$$

Εξωτερική πράξη του $\mathbb{K}$ επι του V είναι μια απεικόνιση.

ΟΡΙΣΜΟΣ Αν $\mathbb{K}$ είναι ένα σώμα, τότε ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$ είναι μια τριάδα $(V, +, \cdot)$, όπου V είναι ένα σύνολο, $+ : V \times V \to V$ είναι μια εσωτερική πράξη επί του V, και $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ είναι μια εξωτερική πράξη του $\mathbb{K}$ επί του V, έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα: [από τώρα τα στοιχεία του V θα καλούνται διανύσματα και θα συμβολίζονται με $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, κλπ]

① $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V : \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$

② $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V : \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$

③ $\exists \vec{O} \in V$ (συμβολισμός) $\forall \vec{x} \in V : \vec{x} + \vec{O} = \vec{x} = \vec{O} + \vec{x}$

④ $\forall \vec{x} \in V \ \exists -\vec{x} \in V$ (συμβολισμός) $: \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{O} = (-\vec{x}) + \vec{x}$

⑤ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in V : \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}$

⑥ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in V : (\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \vec{x}$

⑦ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in V : \lambda(\mu \cdot \vec{x}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{x}$

⑧ $\forall \vec{x} \in V : 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$

Η εσωτερική πράξη $+$ θα καλείται πρόσθεση
η εξωτερική πράξη $\cdot$ θα καλείται βαθμωτός πολ/μός

Το διάνυσμα $\vec{O}$ του αξιώματος ③ καλείται μηδενικό διάνυσμα και, $\forall \vec{x} \in V$: το διάνυσμα $-\vec{x}$ στο αξίωμα ④ καλείται αντίθετο του $\vec{x}$.

Στοιχειώδεις Ιδιότητες

① Το μηδενικό διάνυσμα είναι μοναδικό

Έστω ότι υπάρχουν διανύσματα $\vec{O}_1, \vec{O}_2 \in V$: $\begin{cases} \vec{x} + \vec{O}_1 = \vec{O}_1 + \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in V & (*) \\ \vec{x} + \vec{O}_2 = \vec{x} = \vec{O}_2 + \vec{x} & (**) \end{cases}$

Θδο: $\vec{O}_1 = \vec{O}_2$. Πράγματι, θέτοντας στην σχέση $(*)$ $\vec{x} = \vec{O}_2$, θα έχουμε: $\vec{O}_2 + \vec{O}_1 = \vec{O}_2 = \vec{O}_1 + \vec{O}_2$

Στην σχέση $(**)$, θέτουμε $\vec{x} = \vec{O}_1$, και τότε: $\vec{O}_1 + \vec{O}_2 = \vec{O}_1 = \vec{O}_2 + \vec{O}_1$ $\Big\} \Rightarrow \vec{O}_1 = \vec{O}_2$

② Το αντίθετο διάνυσμα ενός διανύσματος είναι μοναδικό

Έστω $\vec{x} \in V$ και έστω $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ δύο διανύσματα τα οποία ικανοποιούν

$\begin{cases} \vec{x}+\vec{x_1}=\vec{0}=\vec{x_1}+\vec{x} \\ \vec{x}+\vec{x_2}=\vec{0}=\vec{x_2}+\vec{x} \end{cases}$ ΘΔΟ $\vec{x_1}=\vec{x_2}$

ΔΕΥΤΕΡΗ ΣΧΕΣΗ

Στην πρώτη σχέση προσθέτουμε το $\vec{x_2}$: $\vec{x_2}(\vec{x}+\vec{x_1})=\vec{x_2}+\vec{0} \overset{\text{Αξίωμα 1}}{\underset{\text{Αξίωμα 3}}{\Rightarrow}} (\vec{x_2}+\vec{x})+\vec{x_1}=\vec{x_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{0}+\vec{x_1}=\vec{x_2} \xRightarrow[\text{Αξίωμα 3}]{} \vec{x_1}=\vec{x_2}$

Έτσι από τώρα και στο εξής, θα γράφουμε $-\vec{x}$ για το αντίθετο του $\vec{x}$

(3) $\forall \vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V$: $\begin{cases} \vec{x}+\vec{y}=\vec{x}+\vec{z} \Rightarrow \vec{y}=\vec{z} \\ \vec{x}+\vec{y}=\vec{z}+\vec{y} \Rightarrow \vec{x}=\vec{z} \end{cases}$

$\vec{x}+\vec{y}=\vec{x}+\vec{z} \Rightarrow (-\vec{x})+(\vec{x}+\vec{y})=(-\vec{x})+(\vec{x}+\vec{z}) \overset{1}{\Rightarrow} ((-\vec{x})+\vec{x})+\vec{y}=((-\vec{x})+\vec{x})+\vec{z}$

$\overset{4}{\Rightarrow} \vec{0}+\vec{y}=\vec{0}+\vec{z} \overset{3}{\Longrightarrow} \vec{y}=\vec{z}$

(4) $\forall \vec{x}\in V$: $0\cdot\vec{x}=\vec{0}$ και $\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}$

$\forall \lambda\in\mathbb{K}$

$0\cdot\vec{x}=(0+0)\cdot\vec{x} \overset{6}{=} 0\cdot\vec{x}+0\cdot\vec{x} \overset{3}{\Rightarrow} 0\cdot\vec{x}+\vec{0}=0\cdot\vec{x}+\vec{0}\cdot\vec{x}$

Από την ιδιότητα (3): $\vec{0}\cdot\vec{x}=\vec{0}$

Παρόμοια: $\lambda\cdot\vec{0}=\lambda(\vec{0}+\vec{0}) \overset{5}{=} \lambda\cdot\vec{0}+\lambda\cdot\vec{0} \overset{3}{\Longrightarrow} \lambda\cdot\vec{0}+\vec{0}=\lambda\cdot\vec{0}+\lambda\cdot\vec{0}$

Από την ιδιότητα (3): $\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}$

(5) $\forall \lambda\in\mathbb{K}$, $\forall \vec{x}\in V$: $\lambda\cdot\vec{x}=\vec{0} \Rightarrow$ είτε $\lambda=0$ είτε $\vec{x}=\vec{0}$

Υποθέτουμε ότι $\lambda\neq 0$. Τότε υπάρχει ο $\lambda^{-1}\in\mathbb{R}$ και τότε πολ/ντας βαθμωτά τη σχέση $\lambda\cdot\vec{x}=\vec{0}$ με το λ^{-1} θα έχουμε:

$$\lambda^{-1}(\lambda\cdot\vec{x})=\lambda^{-1}\cdot\vec{0} \xRightarrow[\text{ιδιότητα 4}]{7} (\lambda^{-1}\lambda)\cdot\vec{x}=\vec{0} \Rightarrow 1\cdot\vec{x}=\vec{0} \overset{8}{\Rightarrow} \vec{x}=\vec{0}$$

(6) $\forall \vec{x}\in V$: $(-1)\cdot\vec{x}=-\vec{x}$

$$\vec{x}+(-1)\cdot\vec{x} \underset{8}{=} 1\cdot\vec{x}+(-1)\vec{x} \overset{6}{=\!=} (1+(-1))\vec{x}=0\cdot\vec{x} \xlongequal[4]{\text{ιδιότητα}} \vec{0}$$

Παρόμοια $(-1)\vec{x}+\vec{x}=\vec{0}$ Από την μοναδικότητα του αντίθετου διανύσματος (Ιδιότητα 2): $(-1)\cdot\vec{x}=-\vec{x}$

(7) $\forall \vec{x},\vec{y}\in V$: $-(\vec{x}+\vec{y})=-\vec{x}+(-\vec{y})$ και $-(-\vec{x})=\vec{x}$

$$-(\vec{x}+\vec{y}) \underset{\text{ιδιότητα}}{\overset{6}{=}} (-1)(\vec{x}+\vec{y}) \overset{5}{=} (-1)\vec{x}+(-1)\vec{y} \xlongequal{\text{ιδιότητα 6}} -\vec{x}+(-\vec{y})$$

$$-(-\vec{x}) \underset{6}{\overset{\text{ιδιότητα}}{=}} (-1)((-1)\cdot\vec{x}) \overset{7}{=} ((-1)(-1))\vec{x}=1\vec{x} \overset{8}{=} \vec{x}$$

Συμβολισμός $\forall \vec{x},\vec{y}\in V$: $\vec{x}-\vec{y} \xlongequal[\text{op}]{} \vec{x}+(-\vec{y})$

9) $\forall \lambda,\mu\in\mathbb{K}$, $\forall \vec{x},\vec{y}\in V$: $\begin{cases} \lambda\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{y} \text{ και } \lambda\neq 0 \Rightarrow \vec{x}=\vec{y} \\ \mu\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x} \text{ και } \vec{x}\neq 0 \Rightarrow \lambda=\mu \end{cases}$ [ΑΣΚΗΣΗ]

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

1) Το σύνολο V όλων των διανυσμάτων του επιπέδου ή του χώρου εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης διανυσμάτων και την πράξη βαθμωτού πολ/μου πραγματικού αριθμού με διάνυσμα, είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$.

③ Για το σώμα $\mathbb{K}$, και για $m,n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ όλων των $m\times n$ πινάκων από το σώμα $\mathbb{K}$. Αν εφοδιάσουμε το $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ με την πράξη πρόσθεσης πινάκων και την πράξη βαθμωτού πολ/μου αριθμού από το $\mathbb{K}$ με $m\times n$ πίνακα απαιτούμε μια τριάδα $(M_{m\times n}(\mathbb{K}),+,\cdot)$ η οποία είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$ με μηδενικό διάνυσμα τον μηδενικό $m\times n$ πίνακα και με αντίθετο διάνυσμα το $A=(\alpha_{ij})\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ τον πίνακα:
$-A=(-\alpha_{ij})$

ΑΞΙΩΜΑ ⑤ $\forall\, A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{K}),\ \forall \lambda\in\mathbb{K}: \lambda(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B$

$$\left.\begin{matrix}[\lambda(A+B)]_{ij}=\lambda(\alpha_{ij}+B_{ij})=\lambda\alpha_{ij}+\lambda B_{ij} \\ [\lambda A+\lambda B]_{ij}=(\lambda A)_{ij}+(\lambda B)_{ij}=\lambda\alpha_{ij}+\lambda B_{ij}\end{matrix}\right\| \quad \left.\begin{matrix}\forall\, i=1,\dots m \\ \forall\, j=1,\dots n\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$$

Παρόμοια αποδεικνύονται και τα υπόλοιπα αξιώματα.

④ Θεωρούμε το σύνολο όλων των ακολουθιών αριθμών από το σώμα $\mathbb{K}$:

$$A(\mathbb{K})=\{(\alpha_n)_{n\geq 1} \mid \alpha_n\in\mathbb{K},\ \forall n\geq 1\}$$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ: $\forall (\alpha_n)_{n\geq1}, (B_n)_{n\geq1}\in A(\mathbb{K}): (\alpha_n)_{n\geq1}+(B_n)_{n\geq1}=(\alpha_n+B_n)_{n\geq1}$

ΒΑΘΜΩΤΟΣ ΠΟΛ/ΜΟΣ: $\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall(\alpha_n)_{n\geq1}\in A(\mathbb{K}): \lambda(\alpha_n)_{n\geq1}=(\lambda\alpha_n)_{n\geq1}$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ Η τριάδα $(A(\mathbb{K}),+,\cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$ με μηδενικό διάνυσμα την μηδενική ακολουθία ($(\alpha_n)_{n\geq1}$ με $\alpha_n=0,\ \forall n\geq1$) $(\alpha_n)_{n\geq1}$, την ακολουθία $(-\alpha_n)_{n\geq1}$

Αν $(\alpha_n)_{n\geq1}\in A(\mathbb{K})$ και $(x_n)_{n\geq1}\in A(\mathbb{K})$ $(\alpha_n)_{n\geq1}+(x_n)_{n\geq1}=(\alpha_n)_{n\geq1}=$ $(x_n)_{n\geq1}+(\alpha_n)_{n\geq1}\Rightarrow(\alpha_n+x_n)_{n\geq1}=(\alpha_n)_{n\geq1}\Rightarrow\forall n\geq1: \cancel{\alpha_n}+x_n=\cancel{\alpha_n}\Rightarrow x_n=0,\ \forall n\geq$

ΑΞΙΩΜΑ ⑥ $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\ \forall(\alpha_n)_{n\geq1}\in A(\mathbb{K}): (\lambda+\mu)\cdot(\alpha_n)_{n\geq1}=\lambda(\alpha_n)_{n\geq1}+\mu(\alpha_n)_{n\geq1}$

$$(\lambda+\mu)\cdot(\alpha_n)_{n\geq1}=((\lambda+\mu)\cdot\alpha_n)_{n\geq1}=(\lambda\cdot\alpha_n+\mu\alpha_n)_{n\geq1}=(\lambda\cdot\alpha_n)_{n\geq1}+(\mu\alpha_n)_{n\geq1}=$$
$$=\lambda(\alpha_n)_{n\geq1}+\mu(\alpha_n)_{n\geq1}$$

ΠΑΡΟΜΟΙΑ ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΤΑ ΥΠΟΛΟΙΠΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ.

⑤ $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$

Τότε: $\mathbb{R}$: διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{Q}$
$\mathbb{C}$: διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$

$\forall\ r \in \mathbb{R}, \forall\ z \in \mathbb{C}$ $r \cdot z$ = συνήθης πολ/μος αριθμών

$\forall\ q \in \mathbb{Q}, \forall\ z \in \mathbb{C}$ $q \cdot z$: συνήθης πολ/μος αριθμών

14/11/2017

Ο ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Αν $\mathbb{K}$ είναι ένα σώμα, τότε ένα πολυώνυμο υπεράνω του $\mathbb{K}$ είναι μια έκφραση της μορφής: $\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$, όπου $n \geq 0$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $0 \leq i \leq n$

Έστω $\mathbb{K}[x]$ το σύνολο όλων των πολυωνύμων υπεράνω του $\mathbb{K}$.

Δύο πολυώνυμα $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$ καλούνται ίσα $\Leftrightarrow$

$Q(x) = \beta_0 + \beta_1 \cdot x + \ldots + \beta_m x^m$ θέτοντας $k = \min\{n, m\}$

θα έχουμε $\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_k = \beta_k$ και $\alpha_\lambda = \beta_\lambda = 0$ $\forall\ \lambda > k$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ Έστω $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$ $\in \mathbb{K}[x]$, τότε:

$Q(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_m x^m$

το άθροισμά τους $P(x) + Q(x)$ ορίζεται να είναι πολυώνυμο:

$$P(x) + Q(x) = (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)x + \ldots + (\alpha_k + \beta_k)x^k + (\beta_{k+1} x^{k+1}) + \ldots + \beta_m x^m$$

όπου θέσαμε $k = n = \min\{n, m\}$

ΒΑΘΜΩΤΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ Έστω $\lambda \in \mathbb{K}$ και $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$ Τότε:

Το αντίθετο του πολυωνύμου $P(x)$ είναι το πολυώνυμο $-P(x)$ όπου:
αν $P(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\dots+\alpha_nx^n$, τότε: $-P(x)=-\alpha_0-\alpha_1x-\dots-\alpha_nx^n$

Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΩΝ ΑΞΙΩΜΑΤΩΝ ΑΣΚΗΣΗ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Εστω V: διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$
$F(S,V)=\{f: S\to V \mid f: \text{απεικόνιση}\}$ S: τυχόν μη κενό σύνολο

ΠΡΟΣΘΕΣΗ: $\forall f,g\in F(S,V)$ Ορίζουμε απεικόνιση
$f+g: S\to V$, $(f+g)(s)=f(s)\oplus g(s)$
πρόσθεση στον V

ΒΑΘΜΩΤΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ Έστω $\lambda\in\mathbb{K}$ και $f\in F(S,V)$ Ορίζουμε απεικόνιση $\lambda\cdot f: S\to V$, $(\lambda\cdot f)(s)=\lambda\cdot f(s)$
βαθμωτός πολ/μος του V

- $\forall f,g\in F(S,V)$: $f=g \Leftrightarrow f(s)=g(s)\ \forall s\in S$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ Η τριάδα $(F(S,V),+,\cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$

- Το μηδενικό διάνυσμα του $F(S,V)$ είναι η σταθερή συνάρτηση (απεικόνιση).
$0: S\to V$, $0(s)=\vec{0}$ μηδενικό διάνυσμα του V
- Το αντίθετο διάνυσμα της $f\in F(S,V)$ είναι η απεικόνιση $-f: S\to V$,
$(-f)(s)=-f(s)$ αντίθετο του $f(s)\in V$

Εστω ότι $h\in F(S,V)$: $f+h=f=h+f$, $\forall f\in F(S,V)$ Τότε:
$\forall s\in S$: $(f+h)(s)=f(s) \Rightarrow f(s)+h(s)=f(s)\ \forall s\in S \Rightarrow h(s)=0\ \forall s\in V$
Αντίστροφα $\forall f\in F(S,V)$: $f+0=f+0+f$
$\forall f,g\in F(S,V)$; $\lambda(f+g)=\lambda\cdot f+\lambda g$
$\forall \lambda\in\mathbb{K}$
$[\lambda(f+g)](s)=\lambda((f+g)(s))=\lambda[f(s)+g(s)]=\lambda\cdot f(s)+\lambda g(s)=$
$=(\lambda\cdot f)(s)+(\lambda\cdot g)(s)=(\lambda\cdot f+\lambda g)(s)\ \forall s\in S$
Αρα $\lambda(f+g)=\lambda\cdot f+\lambda\cdot g$

1. $\mathbb{K}^n\ \forall n\geq 1$ Ιδιαίτερα $\mathbb{K}$ δ.χ υπεράνω του $\mathbb{K}$, και $\mathbb{K}$: $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$
2. $M_{m\times n}(\mathbb{K})\ \forall n,m\geq 1$

14/11/2017

$M_{m\times 1}(\mathbb{K}) \overset{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ}}{=\!=} \mathbb{K}_m = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \middle| \; x_i \in \mathbb{K} \right\}$ χωρος στηλων με m στοιχεια απο το $\mathbb{K}$

$M_{1\times n}(\mathbb{K}) \underset{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ}}{=\!=} \mathbb{K}^n = \{ (x_1, x_2, \dots x_n) \mid x_i \in \mathbb{K} \}$ χωρος γραμμων με n στοιχεια

③ $A(\mathbb{K})$ χώρος ακολουθιών με στοιχείο απο το $\mathbb{K}$

④ $\mathbb{K}[s]$ χωρος πολυωνύμων με στοιχεία απο το $\mathbb{K}$

⑤ $F(S, V)$: χώρος απεικονίσεων : $S \to V$

S τυχόν σύνολο V δ.χ

ΥΠΟΧΩΡΟΙ

1 V: διανυσματικός χωρος υπεράνω του $\mathbb{K}$: $\boxed{V: \mathbb{K}\ \delta.x}$

Έστω V: $\mathbb{K}$. δ.x

ΟΡΙΣΜΟΣ Ένα υποσύνολο $W \subseteq V$ καλείται υπόχωρος του $V \Leftrightarrow$

① $W \neq \emptyset$ ② $\forall \vec{x}, \vec{y} \in W: \vec{x} + \vec{y} \in W$ ③ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in W: \lambda \cdot \vec{x} \in W$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Το $W \subseteq V$ είναι υπόχωρος $\Leftrightarrow$ ①', ②, ③ οπου ①': $\vec{0} \in W$

"$\Leftarrow$" ΑΜΕΣΟ

"$\Rightarrow$" Επειδή $W \neq \emptyset \Rightarrow \exists \vec{z} \in W$ και τότε απο③: $0 \cdot \vec{z} \in W$ Όμως $0 \cdot \vec{z} = \vec{0}$

Αρα $\vec{0} \in W$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: Αν W είναι υπόχωρος του V τότε οι πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολ/μου του V, ορίζουν πράξεις

πρόσθεσης $+: W \times W \to W$ και η τριάδα $(W, +, \cdot)$ είναι βαθμωτού πολ/μου $\cdot: \mathbb{K} \times W \to W$ διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$

Επειδή για τις πράξεις +, · του V ικανοποιούνται τα αξιώματα ①-⑧ εως $\mathbb{K}$-δ.x και επειδή οι πράξεις +, · του V περιορίζονται σε πράξεις του W, έπεται ότι οι πράξεις +, · ικανοποιούν τα αξιώματα ①-⑧ για τον W

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ① Αν V: $\mathbb{K}$-δ.χ, τότε ο V περιέχει πάντα ως υπόχωρους τα υποσύνολα: V, $\{\vec{0}\}$: ο μηδενικός υπόχωρος του V

② (Σ) $\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \dots + \alpha_{2n}x_n = 0 \\ \alpha_{m1}x_1 + \dots \alpha_{mn}x_n = 0 \end{cases}$

Πίνακας συντελεστών $A = (\alpha_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$

$B = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ πίνακας σταθερών όρων του (Σ)

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ πίνακας αγνώστων

Τότε (Σ): $A\cdot X = 0$

Αν $\Lambda(\Sigma)$ είναι το σύνολο λύσεων του (Σ), τότε:

$$\Lambda(\Sigma) = \{ y \in \mathbb{K}^n \mid A\,y = 0 \} \subseteq \mathbb{K}^n : \mathbb{K}-\delta.\chi$$

- $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ λύση του $(\Sigma) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \Lambda(\Sigma)$ → το μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{K}^n$
- Έστω $y_1, y_2 \in \Lambda(\Sigma)$ Τότε: $A\cdot y_1 = 0$ και $A\cdot y_2 = 0$ και επομένως $A(y_1+y_2) = A\cdot y_1 + A\cdot y_2 = 0+0 = 0 \Rightarrow y_1 + y_2 \in \Lambda(\Sigma)$
- Έστω $\lambda \in \mathbb{K}$ και $y \in \Lambda(\Sigma)$ Τότε: $A\cdot y = 0$ και $A(\lambda\cdot y) = \lambda \cdot A\cdot y = \lambda\cdot 0 = 0$ $\Rightarrow \lambda\cdot y \in \Lambda(\Sigma)$

Άρα το $\Lambda(\Sigma)$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{K}^n$:

Το σύνολο λύσεων ενός ομογενούς συστήματος m εξισώσεων με ⓝ αγνώστους είναι υπόχωρος $\mathbb{K}$-δ.χ $\mathbb{K}^n$

Έστω V: $\mathbb{K}$-δ.χ και έστω $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots \vec{x}_n \in V$ θεωρούμε το εξής υποσύνολο του V:

$$\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots \vec{x}_n \rangle \overset{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ}}{=} \{ \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \dots + \lambda_n\vec{x}_n \in V \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \in \mathbb{K} \}$$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ Το υποσύνολο $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots \vec{x}_n \rangle$ είναι υπόχωρος του V ο ο οποίος καλείται ο υπόχωρος του V ο οποίος παράγεται από τα $\vec{x}_1, \dots \vec{x}_n$

- για $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$: $0\vec{x}_1 + 0\cdot\vec{x}_2 + \dots + 0\cdot\vec{x}_n = \vec{0} \in \langle \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n \rangle$
- Αν $\lambda_1\cdot\vec{x}_1 + \dots + \lambda_n\vec{x}_n \in \langle \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n \rangle$ Τότε: $\mu_1\vec{x}_1 + \dots + \mu_n\vec{x}_n \in \langle \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n \rangle$

$\lambda_1\vec{x_1}+\ldots+\lambda_n\vec{x_n}+\mu_1\vec{x_1}+\ldots+\mu_n\vec{x_n}=(\lambda_1\vec{x_1}+\mu_1\vec{x_1})+\ldots+(\lambda_n\vec{x_n}+\mu_n\vec{x_n})=$
$(\lambda_1+\mu_1)\vec{x_1}+\ldots+(\lambda_n+\mu_n)\vec{x_n}\in\langle\vec{x_1},\ldots\vec{x_n}\rangle$

- Αν $\kappa\in\mathbb{K}$ $\lambda_1\vec{x_1}+\ldots+\lambda_n\vec{x_n}\in\langle\vec{x_1},\ldots\vec{x_n}\rangle$, τότε $\kappa(\lambda_1\cdot\vec{x_1}+\ldots+\lambda_n\vec{x_n})=$
  $=\kappa(\lambda_1\vec{x_1})+\ldots+\kappa(\lambda_n\vec{x_n})=(\kappa\lambda_1)\vec{x_1}+\ldots(\kappa\lambda_n)\vec{x_n}\in\langle\vec{x_1},\ldots\vec{x_n}\rangle$

21/11/2017

Εστω E: $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.
Ενα υποσύνολο $V\subseteq E$ καλείται υπόχωρος του E ←
ⓐ $\vec{0}\in V$, ⓑ $\forall\vec{x},\vec{y}\in V: \vec{x}+\vec{y}\in V$ ⓒ $\forall\lambda\in\mathbb{K}, \forall\vec{x}\in V: \lambda\cdot\vec{x}\in V$
και τότε V είναι $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος με τις πράξεις του E.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> Αν $\vec{x_1},\vec{x_2},\ldots,\vec{x_n}\in E$, τότε:
$\langle\vec{x_1},\vec{x_2},\ldots,\vec{x_n}\rangle=\{\lambda_1\vec{x_1}+\lambda_2\vec{x_2}+\ldots+\lambda_n\vec{x_n}\in E \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n\in\mathbb{K}\}$
είναι ένας υπόχωρος του E: ο υπόχωρος του E ο οποίος παράγεται από το $\vec{x_1},\ldots\vec{x_n}$.

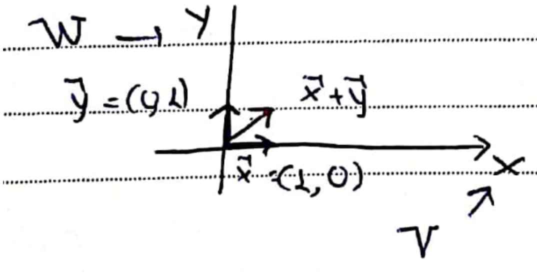
Εστω V, W: υπόχωροι του E

<u>ΛΗΜΜΑ</u>: Η τομή $V\cap W$ είναι υπόχωρος του E

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>
- V, W: υπόχωροι $\Rightarrow$ $\vec{0}\in V$ και $\vec{0}\in W\Rightarrow\vec{0}\in V\cap W$
- $\forall\vec{x},\vec{y}\in V\cap W\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\vec{x},\vec{y}\in V\\ \text{και}\\ \vec{x},\vec{y}\in W\end{array}\right.\xrightarrow[W\text{ υπόχωρος}]{V\text{ υπόχωρος}}\left\{\begin{array}{l}\vec{x}+\vec{y}\in V\\ \text{και}\\ \vec{x}+\vec{y}\in W\end{array}\right.$
  $\Rightarrow\vec{x}+\vec{y}\in V\cap W$
- $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\forall\vec{x}\in V\cap W\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\vec{x}\in V\\ \text{και}\\ \vec{x}\in W\end{array}\right.\xrightarrow[\text{υπόχωροι}]{V,W}\left\{\begin{array}{l}\lambda\cdot\vec{x}\in V\\ \text{και}\\ \lambda\cdot\vec{x}\in W\end{array}\right.\Rightarrow\lambda\cdot\vec{x}\in V\cap W$

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>: Αν $V_1, V_2,\ldots V_n$: υπόχωροι του E τότε $\bigcap_{i=1}^{n}V_i$: υπόχωρος του E

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>: $E=\mathbb{R}^2=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$
$V=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2\mid y=0\}$: υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ ο οποίος παράγεται από το $(1,0)$
$W=\{(0,y)\in\mathbb{R}^2\mid x=0\}$: υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ ο οποίος παράγεται από το $(0,1)$



Εστω $\vec{x}=(1,0)\in V\Rightarrow\vec{x},\vec{y}\ V\cup W$
$\vec{y}=(0,1)\in W$ $\quad\vec{x}+\vec{y}=(1,0)+(0,1)=(1,1)\notin V\cup W$
Αρα η ένωση $V\cup W$ <u>δεν είναι υπόχωρος</u>

ΘΕΩΡΟΥΜΕ ΤΟ ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ

$$V+W = \{\vec{x}+\vec{y}\in E \mid \vec{x}\in V,\ \vec{y}\in W\}$$

<u>ΛΗΜΜΑ:</u> Το σύνολο $V+W$ είναι ένας υπόχωρος του E, ο οποίος καλείται το <u>άθροισμα</u> των υποχώρων V και W, και είναι ο μικρότερος υπόχωρος του E ο οποίος περιέχει τους V και W.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> • $\vec{0}=\vec{0}+\vec{0}$, όπου $\vec{0}\in V$ διότι V υπόχωρος. Άρα $\vec{0}\in V+W$

$\vec{0}\in W$ διότι W υπόχωρος

• Έστω ότι $\vec{z_1},\vec{z_2}\in V+W \Rightarrow$

$\vec{z_1}=\vec{x_1}+\vec{y_1}$, $\vec{z_2}=\vec{x_2}+\vec{y_2}$ όπου $\vec{x_1},\vec{x_2}\in V$, $\vec{y_1},\vec{y_2}\in W$

Τότε $\vec{z_1}+\vec{z_2}=\vec{x_1}+\vec{y_1}+\vec{x_2}+\vec{y_2}=(\vec{x_1}+\vec{x_2})+(\vec{y_1}+\vec{y_2})\in V+W$, διότι

$\vec{x_1},\vec{x_2}\in V$ και V: υπόχωρος $\Rightarrow \vec{x_1}+\vec{x_2}\in V$

$\vec{y_1},\vec{y_2}\in W$ και W: υπόχωρος $\Rightarrow \vec{y_1}+\vec{y_2}\in W$

Έστω $\lambda\in\mathbb{K}$, $\vec{z}\in V+W$. Τότε $\vec{z}=\vec{x}+\vec{y}$, όπου $\vec{x}\in V$, $\vec{y}\in W$ και:

$\lambda\cdot\vec{z}=\lambda(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\cdot\vec{x}+\lambda\cdot\vec{y}\in V+W$, διότι:

$\vec{x}\in V$ και V: υπόχωρος $\Rightarrow \lambda\cdot\vec{x}\in V$

$\vec{y}\in W$ και W: υπόχωρος $\Rightarrow \lambda\cdot\vec{y}\in W$

Επειδή $\forall\ \vec{x}\in V$: $\vec{x}=\underset{\in V}{\vec{x}}+\underset{\in W}{\vec{0}}\in V+W$ Άρα $V\subseteq V+W$

Παρόμοια: $W\subseteq V+W$. Έστω X ένας υπόχωρος του E έτσι ώστε: $V\subseteq X$ και $W\subseteq X$. Θδο $V+W\subseteq X$

Έστω $z\in V+W$. Τότε $\vec{z}=\vec{x}+\vec{y}$, όπου $\vec{x}\in V$, $y\in W$. Επειδή $V,W\subseteq X$ έπεται ότι: $\vec{x},\vec{y}\in X$. Επειδή υπόχωρος $\Rightarrow \vec{z}=\vec{x}+\vec{y}\in X$: Άρα: $V+W\subseteq X$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:</u> Έστω ο $\mathbb{K}$-δ.χ. $M_n(\mathbb{K})$

$$A_n(\mathbb{K})=\{A\in M_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA=-A\}$$

<u>ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ:</u> Τα υποσύνολα $A_n(\mathbb{K})$ και $\Sigma_n(\mathbb{K})$ είναι υπόχωροι του $M_n(\mathbb{K})$ και $A_n(\mathbb{K})+\Sigma_n(\mathbb{K})=M_n(\mathbb{K})$

$$A_n(\mathbb{K})\cap\Sigma_n(\mathbb{K})=\{0\}$$

① Ο μηδενικός $n \times n$ πίνακας είναι συμμετρικός πίνακας $\Rightarrow 0 \in \Sigma_n(\mathbb{K})$

• $\forall A, B \in \Sigma_n(\mathbb{K})$: ${}^tA = A$ και ${}^tB = B$. Τότε ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = A+B$

$\Rightarrow A+B \in \Sigma_n(\mathbb{K})$

• $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $\forall A \in \Sigma_n(\mathbb{K})$

Άρα ο $\Sigma_n(\mathbb{K})$ είναι υπόχωρος του $M_n(\mathbb{K})$

② Παρόμοια ο $A_n(\mathbb{K})$ είναι υπόχωρος του $M_n(\mathbb{K})$

③ Έστω $A \in A_n(\mathbb{K}) \cap \Sigma_n(\mathbb{K}) \Rightarrow {}^tA = A$ και ${}^tA = -A \Rightarrow A = -A \Rightarrow$

$2A = 0 \Rightarrow A = 0$ Άρα $A_n(\mathbb{K}) \cap \Sigma_n(\mathbb{K}) = \{0\}$

④ Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$ θεωρούμε τους πίνακες:

$$\left(\begin{array}{l} {}^t(A+{}^tA) = {}^tA + {}^t({}^tA) = {}^tA + A = A + {}^tA \Rightarrow A + {}^tA \in \Sigma_n(\mathbb{K}) \\ {}^t(A-{}^tA) = {}^tA - {}^t({}^tA) = {}^tA - A = -(A-{}^tA) \Rightarrow A - {}^tA \in A_n(\mathbb{K}) \end{array} \right)$$

$\frac{A+{}^tA}{2} \in \Sigma_n(\mathbb{K})$

$\frac{A-{}^tA}{2} \in A_n(\mathbb{K})$

Τότε: $A = \underbrace{\frac{A+{}^tA}{2}}_{\in \Sigma_n(\mathbb{K})} + \underbrace{\frac{A-{}^tA}{2}}_{\in A_n(\mathbb{K})}$

Άρα $M_n(\mathbb{K}) = \Sigma_n(\mathbb{K}) + A_n(\mathbb{K})$

ΛΗΜΜΑ: Αν $V_1, V_2, \dots V_n$: υπόχωροι του E τότε το σύνολο $V_1 + V_2 + \dots + V_n = \{\vec{x_1} + \vec{x_2} + \dots + \vec{x_n} \in E \mid x_i \in V_i,\ 1 \le i \le n\}$

είναι υπόχωρος του E, καλείται το άθροισμα των $V_1, V_2, \dots, V_n$ και είναι ο μικρότερος υπόχωρος του E ο οποίος περιέχει τους $V_1, V_2, \dots, V_n$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Έστω ο $\mathbb{K}$-δ.χ. $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K},\ 1 \le i \le n\}$

Θέτουμε: $\vec{e_1}(1, 0, \dots, 0)$, $\vec{e_2} = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ... $\vec{e_n} = (0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{K}^n$

και $V_i = \langle \vec{e_i} \rangle = \{\lambda \vec{e_i} \in \mathbb{K}^n \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \{\lambda \cdot (0, \dots 0, \underset{i\text{-οστή θέση}}{1}, 0, \dots 0) \in \mathbb{K}^n \mid \lambda \in$

$= \{(0, 0, \dots, 0, \lambda, 0, \dots 0) \in \mathbb{K}^n \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$

Τότε $\mathbb{K}^n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$. Πράγματι: $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots x_n)$

$= x_1(1, 0, \dots 0) + x_2(0, 1, \dots 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 1) \in V_1 + V_2 + \dots + V_n$

Άρα $\mathbb{K}^n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$

ΑΣΚΗΣΗ $V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x\cdot y - z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ΝΔΟ δεν είναι υπόχωρος

δεν είναι υπόχωρος

γιατί $(1,0,1), (0,1,0) \in V_1$ και $(1,0,1)+(0,1,0) = (1,1,1) \notin V_1$

$V_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι υπόχωρος;

δεν είναι υπόχωρος γιατί $(1,1) \in V_2$ και $2(1,1) = (2,2) \notin V_2$, διότι $2 \neq 2^2$

$V_3 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^2 = A\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$ είναι υπόχωρος;

δεν είναι υπόχωρος

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in V_3$, διότι $I_2^2 = I_2$ και $(3I_2)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \neq 3I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$V_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0 \text{ και } z \leq 0\}$

δεν είναι υπόχωρος

$(1,0,-1) \in V_4$ και $(-1)(1,0,-1) = (-1,0,1) \notin V_4$

$V_5 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 1\} \subseteq F(\mathbb{R},\mathbb{R})$

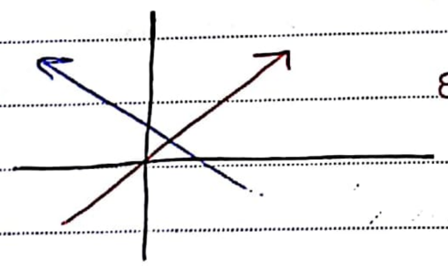
$0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $0(x) = 0$ και $0 \notin V_5$

$V_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x|+|y|+|z| \geq 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ δεν είναι υπόχωρος

$(0,0,0) \notin V_6$

$V_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

είναι υπόχωρος εάν το $\gamma = 0$ και δεν είναι υπόχωρος εάν το $\gamma \neq 0$



είναι υπόχωροι αμα περνάν από το (0) αλλιώς δεν

δεν είναι υπόχωροι.

ΟΡΙΣΜΟΣ Αν $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots \vec{x_n}$ είναι διανύσματα ενός $\mathbb{K}$-δ.χ. E, τότε κάθε διάνυσμα της μορφής $\lambda_1\vec{x_1} + \lambda_2\vec{x_2} + \dots + \lambda_n\vec{x_n}$ θα καλείται γραμμικός συνδυασμός των $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots \vec{x_n}$

ΒΑΣΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ: Πότε ένα διάνυσμα $\vec{x} \in E$ ανήκει στον υπόχωρο $\langle \vec{x_1}, \dots \vec{x_n} \rangle$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ① $\vec{x}_1=(0,1)$, $\vec{x_2}=(-1,2)\in\mathbb{R}^2$ και $\vec{x}=(2,3)\in\mathbb{R}^2$ Πότε $\vec{x}\in\langle\vec{x_1},\vec{x_2}\rangle$

Εστω ότι $\vec{x}\in\langle\vec{x_1},\vec{x_2}\rangle \Rightarrow \exists\, \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}: \vec{x}=\lambda_1\vec{x_1}+\lambda_2\vec{x_2} \Rightarrow (2,3)=\lambda_1(0,1)+\lambda_2(-1,2)$

$\Rightarrow (2,3)=(0,\lambda_1)+(-\lambda_2,2\lambda_2)=(-\lambda_2,\lambda_1+2\lambda_2) \Rightarrow (\Sigma)\begin{cases} -\lambda_2=2 \\ \lambda_1+2\lambda_2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=7 \\ \lambda_2=-2 \end{cases}$

και τότε: $\vec{x}=7\vec{x}_1-2\vec{x_2}\in\langle\vec{x_1},\vec{x_2}\rangle$

② $\vec{x_1}=(1,2,-1)$, $\vec{x_2}=(6,4,2)$, $\vec{x}=(9,2,7)\in\mathbb{R}^3$. Πότε $\vec{x}\in\langle\vec{x_1},\vec{x_2}\rangle$;

Εστω ότι $\vec{x}\in\langle\vec{x_1},\vec{x_2}\rangle \Rightarrow \exists\,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}: \vec{x}=\lambda_1\vec{x_1}+\lambda_2\vec{x_2} \Rightarrow$

$(9,2,7)=\lambda_1(1,2,-1)+\lambda_2(6,4,2)\Rightarrow(9,2,7)=(\lambda_1+6\lambda_2, 2\lambda_1+4\lambda_2, -\lambda_1+2\lambda_2)$

$\Rightarrow (\Sigma) = \begin{cases} \lambda_1+6\lambda_2=9 \\ 2\lambda_1+4\lambda_2=2 \\ -\lambda_1+2\lambda_2=7 \end{cases} \overset{\dots}{\Longrightarrow} \begin{matrix} \lambda_1=-3 \\ \lambda_2=2 \end{matrix}$ Άρα $\vec{x}=-3\vec{x_1}+2\vec{x_2}\in\langle\vec{x_1},\vec{x_2}\rangle$

③ $\vec{x_1}=(0,1,1)$, $\vec{x_2}=(0,0,1)$, $\vec{x}=(1,0,0)\in\mathbb{R}^3$ Πότε $\vec{x}\in\langle\vec{x_1},\vec{x_2}\rangle$;

Εστω ότι $\vec{x}\in\langle\vec{x_1},\vec{x_2}\rangle \Rightarrow \exists\,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}: \vec{x}=\lambda_1\vec{x_1}+\lambda_2\vec{x_2} \Rightarrow$

$\lambda_1(0,1,1)+\lambda_2(0,0,1)\Rightarrow(1,0,0)=(0,\lambda_1,\lambda_1+\lambda_2)\Rightarrow 1=0$ άτοπο

Άρα το $\vec{x}\notin\langle x_1,x_2\rangle$

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

24/11/2017

ΠΡΟΤΑΣΗ Ο υπόχωρος $<\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}>$ δεν αλλάζει μετά την εκτέλεση πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεων στα $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ① Έστω $\vec{x_i} \mapsto \vec{x_i} + \lambda \vec{x_j} := \vec{x_i}'$ ΘΔΟ: $<\vec{x_1}, x_i \dots \vec{x_n}>$
$< \vec{x_1}, \dots \vec{x_i}, \dots \vec{x_n}>$

Έστω $\vec{x} \in <\vec{x_1}, \dots \vec{x_i}', \dots \vec{x_n}> \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{K}: \vec{x} = \lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_i \vec{x_i}' + \dots + \lambda_n \vec{x_n}$
$\Rightarrow \vec{x} = \lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_i (x_i + \lambda x_j) + \dots + \lambda_n \vec{x_n} = \lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_i (\vec{x_i} + \lambda \vec{x_j}) + \dots + \lambda_n \vec{x_n} =$
$= \lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_i \vec{x_i} + \dots + \dots + (\lambda_i \lambda + \lambda_j) x_j + \dots + \lambda_n \vec{x_n} \in <\vec{x_1}, \vec{x_i}, \dots \vec{x_n}>$

Άρα: $<\vec{x_1}, \dots \vec{x_i}', \dots \vec{x_n}> \subseteq <\vec{x_1}, \dots, \vec{x_i}, \dots \vec{x_n}>$ (*)

Έστω $\vec{x} \in <\vec{x_1}, \dots \vec{x_i}, \dots \vec{x_n}> \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{K} : \vec{x} = \lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_i \vec{x_i} + \dots + \lambda_n \vec{x_n}$
$= \lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_i \vec{x_i} + \lambda \lambda_i \vec{x_i} + \dots + \lambda_j \vec{x_j} - \lambda_i \lambda \vec{x_j} + \dots + \lambda_n \vec{x_n} = \lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_i (x_i + \lambda \vec{x_j}) + \dots$
$+ (\lambda_j - \lambda_i \lambda) \vec{x_j} + \dots + \lambda_n \vec{x_n} = \lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_i \vec{x_i}' + \dots + (\lambda_j - \lambda_i \lambda) \vec{x_j} + \dots + \lambda_n \vec{x_n} \in$
$<\vec{x_1}, \dots \vec{x_i}' \dots x_n>$

Άρα: $<\vec{x_1}, \dots \vec{x_i}, \dots \vec{x_n}> \subseteq <\vec{x_1} \dots \vec{x_i}' \dots \vec{x_n}>$ (**)

Από τις (*) (**) προκύπτει ότι $<\vec{x_1}, \dots \vec{x_i}, \dots \vec{x_n}> = <\vec{x_1}, \dots \vec{x_i}', \dots \vec{x_n}>$

② $\vec{x} \in <\vec{x_1}, \dots \vec{x_i}, \dots \vec{x_j} \dots \vec{x_n}> \Rightarrow \exists \lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{K} : \vec{x} = \lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_i \vec{x_i} + \dots +$
$\lambda_j \vec{x_j} + \dots + \lambda_n \vec{x_n} = \lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_j \vec{x_j} + \dots + \lambda_i \vec{x_i} + \dots + \lambda_n \vec{x_n} \in <\vec{x_1}, \vec{x_j} \dots x_i \vec{x}>$

Άρα $<\vec{x_1}, \dots \vec{x_j}, \dots \vec{x_i}, \dots \vec{x_n}> \subseteq \vec{x_1}, \vec{x_i}, \vec{x_j} \dots \vec{x_n}>$

Παρόμοια $<\vec{x_1} \dots \vec{x_j} \dots \vec{x_i} \dots \vec{x_n}> \subseteq <\vec{x_1}, \dots \vec{x_i}, \dots \vec{x_j} \dots \vec{x_n}>$

③ Έστω ότι $\vec{x} \in <\vec{x_1}, \vec{x_i}', \dots \vec{x_n}>$, όπου $\vec{x_i}' = \lambda \vec{x_i}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ Τότε
$\exists \lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{K} : \vec{x} = \lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_i \vec{x_i}' + \dots + \lambda_n \vec{x_n} = \lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_i \lambda \vec{x_i} + \dots + \lambda_n \vec{x_n}$
$\in <\vec{x_1}, \dots, \vec{x_i}, \dots \vec{x_n}>$ Άρα: $<\vec{x_1}, \dots \vec{x_i}', \dots \vec{x_n}> \subseteq <\vec{x_1}, \dots, \vec{x_i}, \dots \vec{x_n}>$ (*)

Έστω $\vec{x} \in <\vec{x_1}, \dots \vec{x_i}, \dots \vec{x_n}> \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} : \vec{x} = \lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_i \vec{x_i} + \dots + \lambda_n$
$= \lambda_1 \vec{x_1} + \dots + (\lambda_i \lambda^{-1})(\lambda x_i^{-1}) + \dots + \lambda_n \vec{x_n} = \lambda_1 \vec{x_1} + \dots + (\lambda_i \lambda^{-1}) \vec{x_i}' + \dots + \lambda_n \vec{x_n}$
$\in <\vec{x_1}, \dots \vec{x_i}', \dots, \vec{x_n}>$

Άρα $<\vec{x_1}, \dots \vec{x_i}, \dots \vec{x_n}> \subseteq <\vec{x_1}, \dots \vec{x_i}', \dots \vec{x_n}>$ (**) Από τις (*) (**) $\Rightarrow$
$<\vec{x_1}, \dots \vec{x_i}, \dots \vec{x_n}> = <\vec{x_1}, \dots \vec{x_i}', \dots \vec{x_n}>$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Αν Ε $\mathbb{K}$-δ.χ μπορούμε να βρούμε διανύσματα $\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}$
$$E = <\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}>;$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Γενικά όχι, όμως για κάθε $\mathbb{K}$ δ.χ Ε, υπάρχει ένα $S \subseteq E$ τ.ω $<S> =$

24/11/2017

όπου $<S> = \{ \lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_n \vec{x_n} \in E \mid \begin{matrix} x_1 \dots x_n \in S \\ \lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{K} \end{matrix} \text{ και } n \in \mathbb{N} \}$

είναι ο υπόχωρος ο οποίος παράγεται από το $S \subseteq E$. Το υποσύνολο $<S>$ είναι πράγματι υπόχωρος του E: [ΑΣΚΗΣΗ]

ΟΡΙΣΜΟΣ Ένα σύνολο διανυσμάτων $\vec{x_1}, \dots \vec{x_n} \in E$ καλείται σύνολο γεννητόρων του $E \Leftrightarrow E = <\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}>$ και τότε τα διανύσματα $\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}$ καλούνται γεννήτορες του E, και το σύνολο $\{\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}\}$ παράγει τον E. Ο $\mathbb{K}$-δ.χ E καλείται πεπερασμένα παραγόμενος $\Leftrightarrow$ ο E έχει ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων: $\exists \vec{x_1}, \dots \vec{x_n} \in E : E = <\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ① Στον $\mathbb{K}$δ.χ $\mathbb{K}^n$, θεωρούμε τα διανύσματα: $\vec{e_1} = (1,0,0,\dots 0)$
$\vec{e_2} = (0,1,0,\dots 0) \dots \dots \vec{e_n} = (0,0,\dots,0,1)$

Τότε το σύνολο $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots \vec{e_n}\}$ παράγει τον $\mathbb{K}^n$: $\mathbb{K}^n = <\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots \vec{e_n})$

$= (x_1, 0, 0, \dots 0) + (0, x_2, 0 \dots 0) + \dots + (0, \dots, 0, x_n) =$

$= x_1(1,0,0,\dots 0) + x_2(0,1,0\dots 0) + \dots + x_n(0\dots 0,1) = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \dots + x_n\vec{e_n}$

$\in <\vec{e_1}, \dots \vec{e_n}>$ Άρα $\mathbb{K}^n = <\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}>$

② Στον $\mathbb{K}$-δ.χ $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, έστω $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dots + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dots + \alpha_{1n}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_{m1}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_{mn}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ορίζουμε m×n πίνακες

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-γραμμή}$$

j-στήλη

Τότε

$A = \alpha_{11}E_{11} + \ldots \alpha_{1n}E_{1n}$
$+ \alpha_{21}E_{21} + \ldots + \alpha_{2n}E_{2n}$
$\vdots$
$+ \alpha_{m1}E_{m1} + \ldots + \alpha_{mn}E_{mn}$

Άρα $M_{m\times n}(\mathbb{K}) = \langle E_{ij} \;\; {}^{i=1,\ldots,m}_{j=1,\ldots,n} \rangle$
(είναι πεπερασμένα παραγόμενος)

③ $\mathbb{K}[x] = \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n \mid \alpha_i \in \mathbb{K} : 0 \le i \le n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$

Ο $\mathbb{K}[x]$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενος. Έστω ότι ο $\mathbb{K}[x]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος $\Rightarrow P_1(x), \ldots, P_n(x) \in \mathbb{K}[x]$:
$\mathbb{K}[x] = \langle P_1(x), \ldots P_n(x) \rangle \Rightarrow \forall P(x) \in \mathbb{K}[x] : \exists \lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{K}$:
$P(x) = \lambda_1 P_1(x) + \ldots + \lambda_n P_n(x)$. Έστω $\deg P_1(x) = k$ τότε:
$\deg P(x) \le \max\{k_1, k_2, \ldots k_n\}$ $\quad \deg P_1(x) = k_1$ τότε:
$\deg P(x) \le \max\{k_1, k_2, \ldots k_n\}$ $\quad \deg P_n(x) = k_n$
Αν επιλέξουμε $P(x) = x^m$ όπου $m > \max\{k_1, \ldots k_n\}$ τότε $P(x) \ne \lambda_1 P_1(x) + \ldots + \lambda_n P_n(x)$. Άρα δεν υπάρχει πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων του $\mathbb{K}[x]$

④ $\forall n \ge 1 : \mathbb{K}_n[x] = \{P(x) \in \mathbb{K}[x] \mid \deg P(x) \le n\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{K}[x]$

- $0 \in \mathbb{K}_n[x]$
  αν $P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{K}_n[x]$, τότε $\deg P_1(x) \le n$, $\deg P_2(x) \le n \Rightarrow$
  $\deg(P_1(x) + P_2(x)) \le \max\{\deg P_1(x), \deg P_2(x)\} \le n \Rightarrow P_1(x) + P_2(x) \in \mathbb{K}_n[x]$
  αν $P_1(x) + P_2(x) = 0 \in \mathbb{K}_n[x]$
- αν $P(x) \in \mathbb{K}_n[x]$ και $\lambda \in \mathbb{K}$, τότε $\lambda P(x) \in \mathbb{K}_n[x]$ διότι:
  - αν $\lambda = 0 \Rightarrow \lambda P(x) = 0 \in \mathbb{K}_n[x]$
  - αν $\lambda \ne 0$ και $P(x) = 0 \Rightarrow \lambda P(x) = 0 \in \mathbb{K}_n[x]$

-αν $\lambda \neq 0$ και $P(x) \neq 0 \Rightarrow \deg(\lambda P(x)) = \deg P(x) \leq n \Rightarrow \lambda P(x) \in \mathbb{K}_n[x]$

Άρα $\mathbb{K}_n[x]$: υπόχωρος του $\mathbb{K}[x]$

$\forall\ P(x) = \alpha_0 1 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n \in \mathbb{K}[x]$ έχουμε τα πολυώνυμα $1, x, x^2, \dots, x^n$ τα οποία ανήκουν στο $\mathbb{K}_n[x]$ και το $P(x)$ είναι γραμμικός συνδυασμός αυτών. Άρα $\mathbb{K}_n[x] = \langle 1, x, x^2, \dots, x^n \rangle$ πεπερασμένα παραγόμενος

$\mathbb{K}[x] = \langle 1, x, x^2, \dots, x^n, \dots \rangle \Rightarrow S = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\} \subseteq \mathbb{K}[x]$

είναι σύνολο γεννητόρων

$P(x) = 3 \cdot 1 - 5x + x^7$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> Ένα σύνολο διανυσμάτων $x = \{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}\} \subseteq E$ καλείται <u>γραμμικά εξαρτημένο</u> $\Leftrightarrow \exists\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ όχι όλοι μηδέν έτσι ώστε: $\lambda_1 \vec{x_1} + \lambda_2 \vec{x_2} + \dots + \lambda_n \vec{x_n} = 0$ η παραπάνω σχέση θα καλείται <u>σχέση γραμμικής εξάρτησης</u> των $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}$. Το σύνολο διανυσμάτων $x = \{\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}\}$ καλείται γραμμικά ανεξάρτητο $\Leftrightarrow$ το x δεν είναι <u>γραμμικά εξαρτημένο</u>, δηλαδή $\forall\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}: \lambda_1 \vec{x_1} + \lambda_2 \vec{x_2} + \dots + \lambda_n \vec{x_n} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> ① $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\} \subseteq \mathbb{K}^n$ $\vec{e_i} = (0, \dots, 0, \underset{i\text{-οστή θέση}}{1}, 0, \dots, 0)$

Έστω ότι $\lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \dots + \lambda_n \vec{e_n} = \vec{0} \Rightarrow$

$\lambda_1 (1, 0, \dots, 0) + \lambda_2 (0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + \lambda_n (0, 0, \dots, 1) = (0, \dots, 0)$

$= (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (0, 0, \dots, 0) \Rightarrow (\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0)$

$\Rightarrow$ το σύνολο $\{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ Γραμμικά Ανεξάρτητο

② Έστω $x = \{\{E_{ij}\}_{i=1, j=1}^{m \quad n}\} \subseteq M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $E_{ij} = \begin{array}{cc} & j\text{-γραμμή} \\ & \downarrow \\ & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ i\text{-γραμμή} \rightarrow & \end{array}$

Τότε το X: γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω: $\alpha_{11} E_{11} + \dots + \alpha_{1n} E_{1n} + \dots + \alpha_{m1} E_{m1} + \dots + \alpha_{mn} E_{mn}$

$= 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_{ij} = 0, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$

Άρα το X γραμμικά ανεξάρτητο

③ Έστω ο $\mathbb{K}$-δ.χ $\mathbb{K}_n[x]$ και $X=\{1, x, x^2, \dots x^n\}$ Τότε X γραμμικά ανεξάρτητα

διότι αν $\alpha_0 1 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n = 0 \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

④ E: $\mathbb{K}$-δ.χ και $\vec{x} \in E$ τότε $\vec{x}$: γραμμικά ανεξάρτητο $\Leftrightarrow \vec{x} \neq \vec{0}$

το $\vec{x} = \vec{0}$ είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένο διότι $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Έστω $\vec{x} \neq \vec{0}$ και $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}$ Αν $\lambda \neq 0 \Rightarrow \exists \lambda^{-1} \in \mathbb{K}$ και τότε $\lambda^{-1} \cdot \lambda \cdot \vec{x} = \lambda^{-1} \cdot \vec{0} = \vec{0}$

$\Rightarrow 1 \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$ άτοπο Άρα $\lambda = 0 \Rightarrow \vec{x}$ Γραμμικά ανεξάρτητο.

Αντίστροφα: αν $\vec{x}$ γραμμικά ανεξάρτητο, τότε το $\vec{x} \neq \vec{0}$ διότι αν $\vec{x} = \vec{0}$ είδαμε ότι το $\vec{x}$ γραμμικά ανεξάρτητο: άτοπο.

28/11/2017

E: διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$

Αν $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots x_n \in E$, τότε: τα $\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}$ καλούνται γραμμικά ανεξάρτητα (Γ.Α)

$\Leftrightarrow \forall \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n : \lambda_1 \vec{x_1} + \lambda_2 \vec{x_2} + \dots + \lambda_n \vec{x_n} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

Τα $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}$ καλούνται γραμμικά εξαρτημένα (Γ.Ε) $\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ και $\lambda_1 \vec{x_1} + \lambda_2 \vec{x_2} + \lambda_n \vec{x_n} = \vec{0}$ και η τελευταία

σχέση θα καλείται τότε σχέση γραμμικής εξάρτησης των $\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ① Αν $\vec{0} \in \{\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}\}$ τότε το σύνολο $\{\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}\}$

Έστω ότι $\vec{x_k} = \vec{0}$, όπου $k = 1, \dots n$ και τότε $0 \cdot \vec{x_1} + \dots + 0 \cdot \vec{x_{k-1}} + 1 \vec{x_k} + 0 \vec{x_{k+1}} + \dots + 0 \cdot \vec{x_n}$:

σχέση γραμμικής εξάρτησης.

② Αν $X = \{\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}\}$ είναι ένα Γ.Α σύνολο και $Y \subseteq X$ Τότε Y Γ.Α

Έστω ότι $Y = \{\vec{x_{i_1}}, \dots \vec{x_{i_k}}\}$ όπου $i_1, \dots i_k \in \{1, \dots k\}$ Αν $\lambda_1, \dots \lambda_k \in \mathbb{K}$

και $\lambda_1 \vec{x_{i_1}} + \dots \lambda_k \cdot \vec{x_{i_k}} = \vec{0}$ Τότε: $\lambda_1 \vec{x_{i_1}} + \dots + \lambda_k x_{i_k} + 0 \vec{x_{i_{k+1}}} + \dots + 0 \vec{x_{i_k}} = \vec{0}$

όπου $\{i_1, \dots i_k, \dots i_n\} = \{1, \dots n\}$ Επειδή $\{\vec{x_{i_1}}, \dots \vec{x_{i_k}}\} = \{\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}\}$ και

το σύνολο αυτό είναι Γ.Α $\Longrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k$ Άρα Y Γ.Α

③ Αν $X = \{\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}\}$ είναι ένα Γ.Ε σύνολο και $Y \subseteq E$: $X < Y$ Τότε: Y: Γ.Ε

Έστω ότι $Y = \{\underbrace{\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}}_{X}, \vec{x_{n+1}}, \dots \vec{x_m}\}$ Επειδή το X: Γ.Ε $\Rightarrow$

$\exists \lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{K}$: $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$: $\lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_n \vec{x_n} = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 \vec{x_1} + \dots + \lambda_n \vec{x_n} + 0 \cdot \vec{x_{n+1}} + \dots + 0 \cdot \vec{x_m} = \vec{0}$ και $(\lambda_1, \dots \lambda_n, 0, \dots 0) \neq (0, 0)$

Αρα το Γ.Ε

④ Εστω $X=\{\vec{x_1},\dots,\vec{x_n}\}\subseteq E$. Τότε το X: Γ.Ε $\Leftrightarrow \exists\, k=1,\dots,n$: είτε $\vec{x_k}=\vec{0}$ είτε $\vec{x_k}\in\langle \vec{x_1},\dots,\vec{x_{k-1}}\rangle$

«$\Leftarrow$» Εστω ότι $\exists\, k=1,\dots,n$: είτε $\vec{x_k}=\vec{0}$ είτε: $\vec{x_k}\in\langle x_1,\dots,\vec{x_{k-1}}\rangle$

Αν $\vec{x_k}=\vec{0}$ τότε είδαμε ότι το X: Γ.Ε Αν $\vec{x_k}\in\langle \vec{x_1},\dots,\vec{x_{k-1}}\rangle$ τότε

$\exists\, \lambda_1,\dots,\lambda_{k-1}\in K$: $\vec{x_k}=\lambda_1\vec{x_1}+\dots+\lambda_{k-1}\vec{x_{k-1}} \Rightarrow \lambda_1\vec{x_1}+\dots+\lambda_{k-1}\vec{x_{k-1}}+(-1)\vec{x_k}+0\vec{x_{k+1}}+\dots+0\vec{x_\nu}$

Η τελευταία σχέση είναι μια σχέση γραμμικής εξάρτησης $\lambda_k=-1\neq 0$ Αρα X: Γ.Ε

«$\Rightarrow$» Έστω ότι X: Γ.Ε Τότε $\exists\, \lambda_1,\dots,\lambda_k\in K$ με $(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\neq(0,\dots,0)$ και $\lambda_1\vec{x_1}+\dots+\lambda_n\vec{x_n}=\vec{0}$. Θέτουμε:

$k=\max\{i,\dots,n \mid \lambda_i\neq 0\}$ Τότε $\lambda_{k+1}=\dots=\lambda_n=0$

① Αν $k=1$, τότε $\lambda_1\neq 0$ και $\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$ και $\lambda_1\cdot\vec{x_1}=\vec{0}$, $\lambda_1\neq 0$ $\Rightarrow \vec{x_1}=0$

② Αν $k\geq 2$, τότε $\lambda_1\cdot\vec{x_1}+\dots+\lambda_k\cdot\vec{x_k}=\vec{0}$

$\Rightarrow \lambda_1\cdot\vec{x_1}+\dots+\lambda_{k-1}\vec{x_{k-1}}=(-\lambda_k)\vec{x_k}\Rightarrow \vec{x_k}=\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)\vec{x_1}+\dots+\left(\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\right)\vec{x}_{k-1}\in\langle\vec{x_1},\dots,\vec{x_{k-1}}\rangle$

⑤ Έστω $X=\{\vec{x_1},\dots,\vec{x_n}\}$: Γ.Α και έστω $\vec{x}\in E$:

$X\cup\{\vec{x}\}=\{\vec{x_1},\vec{x_2},\dots,\vec{x_k},\vec{x}\}$: Γ.Ε. Τότε: $\vec{x}\in\langle\vec{x_1},\dots,\vec{x_n}\rangle$

$X\cup\{\vec{x}\}$ Γ.Ε $\Rightarrow \exists\, \lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n,\lambda\in K$: $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n,\lambda)\neq(0,\dots,0)$

$\lambda_1\vec{x_1}+\dots+\lambda_n\vec{x_n}+\lambda\vec{x}=0$ ⊛

• Αν $\lambda=0$ τότε $\lambda_1\vec{x_1}+\dots+\lambda_n\vec{x_n}=\vec{0}\xrightarrow[\text{Γ.Α}]{X}\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$: άτοπο, διότι $(\lambda_1,\dots,\lambda_n,\lambda)=(0,\dots,0)$

• Άρα $\lambda\neq 0$ και τότε: ⊛ $\Rightarrow \vec{x}=\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)\vec{x_1}+\dots+\left(-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right)\vec{x_n}\in\langle\vec{x_1},\dots,\vec{x_n}\rangle$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ① $\vec{x_1}=(1,2,-1)$, $\vec{x_2}=(1,-2,1)$, $\vec{x_3}=(-3,2,1)\in\mathbb{R}^3$

Εστω ότι $\lambda_1\vec{x_1}+\lambda_2\vec{x_2}+\lambda_3\vec{x_3}=\vec{0}\Rightarrow\lambda_1(1,2,-1)+\lambda_2(1,-2,1)+\lambda_3(-3,2,1)=\vec{0}=(0,0,0)$

$\Rightarrow(\lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3,\ 2\lambda_1-2\lambda_2+2\lambda_3,\ -\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)=(0,0,0)$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3=0\\ 2\lambda_1-2\lambda_2+2\lambda_3=0\\ -\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}\qquad A=\begin{pmatrix}1&1&-3\\2&-2&2\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

$|A|=1\neq 0$ άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την μηδενική $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

Αρα τα $\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3}$ Γ.Α

$\lambda_1 \vec{x_1} + \lambda_2 \vec{x_2} + \lambda_3 \vec{x_3} = 0$

$$(\Sigma)\ \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{matrix} \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2\lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 - 2\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 2\lambda_1 \end{matrix}$$

Θέτουμε $\lambda_1 = \kappa \in \mathbb{K}$ και τότε Γενική λύση του (Σ): $\lambda_1 = \kappa$, $\lambda_2 = 2\kappa$, $\lambda_3 = \kappa$, $\kappa \in \mathbb{K}$

Για $\kappa = 1$, έχουμε $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$ και τότε $\vec{x_1} + 2\vec{x_2} + \vec{x_3} = \vec{0}$
$\Rightarrow \{3\vec{x_1} + \vec{x_2} + \vec{x_3}\}$: Γ.Ε

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\mathbb{K}_n[x] = \{P(x) \in \mathbb{K}[x] \mid \deg P(x) \leq n\} \cup \{0\}$

① Το σύνολο $\{1, x, x^2, \dots, x^4\}$: σύνολο γεννητόρων και Γ.Α

② Έστω $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ πολυώνυμα υπεράνω του $\mathbb{K}$ και υποθέτουμε ότι $\deg P_0(x) = 0$, $\deg P_1(x) = 1, \dots, \deg P_n(x) = n$. Τότε το σύνολο

$B = \{P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)\}$: Γ.Α

Έστω ότι: $\lambda_0 P_0(x) + \lambda_1 P_1(x) + \dots + \lambda_{n-1} P_{n-1}(x) + \lambda_n P_n(x) = 0$

- Αν θέσουμε $Q(x)$ = το πολυώνυμο του πρώτου μέλους, τότε:
- Αν $\lambda_n \neq 0$, τότε $\deg Q(x) = n$ άτοπο, διότι $Q(x) = 0$

  Άρα $\lambda_n = 0$ και τότε $Q(x) = \lambda_0 P_0(x) + \lambda_1 P_1(x) + \dots + \lambda_{n-1} P_{n-1}(x) = 0$
- Αν $\lambda_{n-1} \neq 0$, τότε $\deg Q(x) = n-1$, άτοπο, διότι $Q(x) = 0$

  Άρα $\lambda_{n-1} = 0$

  $\vdots$

Συνεχίζοντας αυτή η διαδικασία, έπεται ότι $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ Άρα B = Γ.Α

Για παράδειγμα: $B = \{1, (x-\alpha), (x-\alpha)^2, \dots, (x-\alpha)^n\}$ Γ.Α νο υποσύνολο του B. Τότε το X είναι της μορφής $X=\{x^{k_1}, x^{k_2}, \dots, x^{k_n}\}$ και μπορούμε να υποθέσουμε ότι $k_1<k_2<\dots<k_n$. Αν $\lambda_1 x^{k_1}+\lambda_2 x^{k_2}+\dots+\lambda_n x^{k_n}=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n$ (όπως και προηγούμενη) Άρα το B: Γ.Α

1/12/2017

E: διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα υποσύνολο $B\subseteq E$ καλείται βάση $E \Leftrightarrow$

Το σύνολο B: ΓΑ: κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του B είναι ΓΑ

Το B παράγει του E: $E=\langle B\rangle$: κάθε διάνυσμα του E είναι γραμμικός συνδυασμός πεπερασμένου πλήθους διανυσμάτων του B

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ...

Scanned by CamScanner

• Έστω $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 E_1 + \dots + x_n E_n \Rightarrow B$ παράγει τον K^n

③ Στον K-δ.χ $M_{m\times n}(K)$ το σύνολο

$B = \{E_{ij}\}_{i=1,\, j=1}^{m \quad n}$, όπου $E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ ← i-γραμμή

↑ j-στήλη

$A = (\alpha_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} E_{ij}$

είναι βάση του $M_{m\times n}(K)$ η οποία καλείται κανονική βάση

④ Στον K-δ.χ $K_n[x] = \{P(x) \in K[x] \mid \deg P(x) \le n\} \cup \{0\}$ το σύνολο

$B = \{1, x, x^2, \dots x^n\}$

είναι βάση του $K_n[x]$ η οποία καλείται κανονική βάση

⑤ Στον K-δ.χ $K[x]$ όλων των πολυωνύμων υπεράνω του K, το σύνολο

$B = \{1, x, x^2, \dots x^n\}$

είναι βάση του $K[x]$ η οποία καλείται κανονική βάση

⑥ Ο $\mathbb{C}$ K-δ.χ $\mathbb{C}$ έχει μια βάση $B=\{1\}$

Ο $\mathbb{R}$-δ.χ $\mathbb{C}$ $z = \alpha + bi$, $\alpha, b \in \mathbb{R}$ έχει ως βάση το $B=\{1, i\}$

$\underset{\lambda_1}{(-1)} 1 + \underset{\lambda_2}{(-i)} i = -1+1=0$ το $\{1, i\}$: Γ.Ε υπεράνω του $\mathbb{C}$

$\{1, i\}$: ΓΑ υπεράνω

$\lambda_1 + \lambda_2 i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$
$(\lambda_1 + \lambda_2 i)(\lambda_1 - \lambda_2 i) = 0$
$\lambda_1^2 - \lambda_2^2 =$
$\Downarrow$
$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω ότι έχουμε ένα σύνολο $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \dots \vec{e_n}\} \subseteq E_1$ και $\vec{x} \in E$

Το $\vec{x}$ γράφεται μοναδικά σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$

$\Leftrightarrow$ αν $\left.\begin{array}{l} \vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \dots + \lambda_n \vec{e_n} \\ \vec{x} = k_1 \vec{e_1} + \dots + k_n \vec{e_n} \\ \text{όπου } \lambda_i, k_i \in K \;\; 1 \le i \le n \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = k_1, \dots, \lambda_n = k_n$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ένα σύνολο $B = \{\vec{e_1}, \dots \vec{e_n}\} \subseteq E$ είναι βάση του $E \Leftrightarrow$ κάθε διάνυσμα του E γράφεται μοναδικά σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{e_1}, \dots \vec{e_n}$

Απόδειξη: "$\Rightarrow$" Έστω ότι το B: βάση του E. Τότε κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in E$ γράφεται ως $\vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \dots + \lambda_n \vec{e_n}$, όπου $\lambda_1, \dots \lambda_n \in K$

Έστω $\vec{x} = \kappa_1\vec{e_1} + \ldots + \kappa_n\vec{e_n}$ Τότε $\lambda_1\vec{e_1} + \ldots + \lambda_n\vec{e_n} + \ldots + \kappa_n\vec{e_n} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda_1-\kappa_1)\vec{e_1} + \ldots + (\lambda_n-\kappa_n)\vec{e_n} = \vec{0} \\ \{\vec{e_1} \ldots \vec{e_n}\} \text{ Γ.Α}\end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{ll}\lambda_1-\kappa_1=0, \ldots & \lambda_n-\kappa_n=0 \\ \lambda_1=\kappa_1 & \lambda_n=\kappa_n\end{array}$$

Άρα έχουμε μοναδικότητα της γραφής

"$\Leftarrow$" προφανώς το σύνολο B παράγει τον E. Έστω ότι $\lambda_1\vec{e_1}+\lambda_2\vec{e_2}+\ldots+\lambda_n\vec{e_n} = \vec{0} = 0\cdot\vec{e_1}+0\,\vec{e_2}+\ldots+0\vec{e_n}$ λόγω μοναδικότητας της γραφής $\Rightarrow$

$\lambda_1=0, \ldots \lambda_n=0$ Άρα B: ΓΑ $\Rightarrow$ B Βάση

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $B = \{\vec{e_1}, \ldots \vec{e_n}\}$: Βάση του E. Τότε κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in E$ γράφεται μοναδικά ως: $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \ldots + x_n\vec{e_n}$, ... $x_i \in \mathbb{K}$ $1 \le i \le n$

Οι αριθμοί $x_1, \ldots, x_n$ είναι μοναδικοί εξαρτώνται μόνο από το $\vec{x}$ και τη Βάση B και καλούνται συνιστώσες του $\vec{x}$ ως προς τη Βάση

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω $B = \{\vec{e_1}(1,0,0), \vec{e_2}(0,1,0), \vec{e_3}=(0,0,1)\}$ η κανονική Βάση του $\mathbb{R}^3$

Έστω $(x,y,z) \in \mathbb{R}^2$: $(x,y,z) = (x,0,0)+(0,y,0)+(0,0,z) =$
$= x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1) = x\cdot\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$ Οι αριθμοί x, y, z είναι οι συνιστώσες του (x,y,z) ως προς την κανονική Βάση του $\mathbb{R}^3$

Έστω το υποσύνολο $G = \{\vec{\varepsilon_1}=(1,1,1), \vec{\varepsilon_2}=(1,1,0), \vec{\varepsilon_3}=(1,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

- Έστω $\lambda_1\vec{\varepsilon_1}+\lambda_2\vec{\varepsilon_2}+\lambda_3\vec{\varepsilon_3} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(1,1,0)+\lambda_3(1,0,0)=(0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \\ \lambda_1+\lambda_2=0 \\ \lambda_1=0\end{cases} \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0 \quad \text{Άρα } G: \text{Γ.Α}$$

- Έστω $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ και έστω ότι: $(x,y,z) = \alpha\vec{\varepsilon_1} + \beta\vec{\varepsilon_2} + \gamma\vec{\varepsilon_3} \Rightarrow$
$(x,y,z) = \alpha(1,1,1)+\beta(1,1,0)+\gamma(1,0,0) = (\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta, \alpha)$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta+\gamma = x \\ \alpha+\beta = y \Rightarrow \beta = y-\alpha \Rightarrow \beta = y-z \\ \alpha = z\end{cases} \qquad \begin{array}{l}\gamma = x-\alpha-\beta = x-z-(y-z) = \\ = x-z-y+z = x-y \Rightarrow \\ \gamma = x-y\end{array}$$

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $(x,y,z) = z\vec{\varepsilon_1} + (y-z)\vec{\varepsilon_2} + (x-y)\vec{\varepsilon_3}$

Άρα το G: παράγει τον $\mathbb{R}^3$ και επομένως είναι μια Βάση του $\mathbb{R}^3$

Οι συνιστώσες του (x,y,z) ως προς τη Βάση G είναι: $z, y-z, x-y$

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots \vec{e_n}\}$ μια βάση του $\mathbb{K}$-δ.χ E και έστω $G = \{\vec{y_1}, \vec{y_2}, \ldots, \vec{y_m}\} \subseteq E$. Αν $m > n$, τότε G: Γ.Ε

Απόδειξη Αναζητούμε $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$, με: $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq (0,0)$ και έτσι ώστε $\lambda_1\vec{y_1} + \lambda_2\vec{y_2} + \ldots + \lambda_m\vec{y_m} = \vec{0}$. Επειδή το B: Βάση του E1 κάθε διάνυσμα του E γράφεται μοναδικός γραμμικό) συνδυασμό των $\vec{e_1}, \ldots \vec{e_n}$. Άρα:

$$\left.\begin{aligned} \vec{y_1} &= \alpha_{11}\vec{e_1} + \ldots + \alpha_{n1}\vec{e_n} \\ \vec{y_2} &= \alpha_{12}\vec{e_1} + \ldots + \alpha_{n2}\vec{e_n} \\ &\vdots \\ \vec{y_m} &= \alpha_{1m}\vec{e_1} + \ldots + \alpha_{nm}\vec{e_n} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\lambda_1\vec{y_1} + \lambda_2\vec{y_2} + \ldots + \lambda_m\vec{y_m} = \vec{0} \Rightarrow \\ &\lambda_1(\alpha_{11}\vec{e_1} + \ldots + \alpha_{n1}\vec{e_n}) + \\ &\lambda_2(\alpha_{12}\vec{e_1} + \ldots + \alpha_{n2}\vec{e_n}) + \\ &\vdots \\ &+ \lambda_m(\alpha_{1m}\vec{e_1} + \ldots + \alpha_{nm}\vec{e_n}) = \vec{0} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\alpha_{12} + \ldots + \lambda_m\alpha_{1m})\vec{e_1} + \ldots \Rightarrow$$

$$\vdots$$

$$+(\lambda_1\alpha_{n1} + \lambda_2\alpha_{n2} + \ldots + \lambda_m\alpha_{nm})\vec{e_n} = 0$$

$$\xRightarrow{B = \Gamma.A} \begin{cases} \lambda_1\alpha_{11} + \ldots + \lambda_m\alpha_{1m} \\ \\ \lambda_1\alpha_{n1} + \ldots \lambda_m\alpha_{nm} \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Στο σύστημα (Σ) με αγνώστους $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ έχουμε πλήθος αγνώστων $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ δηλαδή $m >$ πλήθος εξισώσεων, δηλαδή n. Τότε γνωρίζουμε ότι το (Σ) έχει τουλάχιστον μια μη-μηδενική λύση $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq (0, \ldots, 0)$ και τότε $\lambda_1\vec{y_1} + \ldots + \lambda_m\vec{y_m} = \vec{0}$ Άρα G: Γ.Ε

Πόρισμα: Αν $B = \{\vec{e_1}, \ldots \vec{e_n}\}$ βάση του $\mathbb{K}$-δ.χ E. Τότε κάθε Γ.Α σύνολο διανυσμάτων του E έχει πλήθος στοιχείων $\leq n$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω B, B': βάσεις του $\mathbb{K}$-δ.χE, και έστω: $|B| = n$, $|B'| = m$ τότε $n = m$

Απόδειξη: B βάση, B': Γ.Α $\xrightarrow{\text{ΠΟΡΙΣΜΑ}}$ $|B'| \leq |B|$

B': βάση, B: Γ.Α $\xrightarrow{\text{ΠΟΡΙΣΜΑ}}$ $|B| \leq |B'|$

$\longrightarrow |B| = |B'|$

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω F και G δύο σύνολα διανυσμάτων στον $\mathbb{K}$-δ.χ E υποθέτουμε ότι: ① F : Γ.Α Τότε υπάρχει μια βάση B του E:
② $\langle G \rangle = E$ $F \subseteq B \subseteq G$
③ $|G| < \infty$
④ $F \subseteq G$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θεωρούμε το ακόλουθο υποσύνολο του E:
$H = \{K \subseteq E \mid F \subseteq K \subseteq G$ και $K : Γ.Α\}$ Τότε το $H \neq \emptyset$, διότι $F \in H$. Επειδή $|G| < \infty$, έπεται ότι το H περιέχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Έστω B το υποσύνολο που ανήκει στο H με το μικρότερο πλήθος στοιχείων. Τότε το B : Γ.Α * Έστω $\vec{x} \in G$.
Τότε έστω το σύνολο $B \cup \{\vec{x}\}$ Τότε: επειδή
$B \in H \Rightarrow F \subseteq B \subseteq G$ και επειδή $\vec{x} \in G$ έπεται ότι $F \subseteq B \cup \{\vec{x}\} \subseteq G$.
Αν το $B \cup \{\vec{x}\}$: Γ.Α τότε καταλήγουμε άτοπο διότι
$|B \cup \{x\}| > |B|$ και το B είναι το στοιχείο του H με το μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων. Άρα $B \cup \{\vec{x}\}$: Γ.Ε και τότε από γνωστή ΠΡΟΤΑΣΗ $\vec{x}$ γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του B : $\vec{x} \in \langle B \rangle$
Άρα κάθε διάνυσμα του G είναι γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του B
Όμως κάθε διάνυσμα του E είναι γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του G
$\Rightarrow$ κάθε διάνυσμα του E είναι γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του B $\langle B \rangle = E$ (**) Από τις (*)(**) $\Rightarrow$ B βάση και $F \subseteq B \subseteq G$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω E ένας $\mathbb{K}$δ-χ ο οποίος είναι πεπερασμένα παραγόμενο και $E \neq \{\vec{0}\}$ Τότε ο E έχει μια βάση B με $|B| < \infty$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $E \neq \{\vec{0}\}$ και επειδή ο E πεπερασμένα παραγόμενος $\Rightarrow$ $\exists\, G \subseteq E : |G| < \infty$ και $\langle G \rangle = E$. Επειδή $E \neq \{\vec{0}\} \Rightarrow \exists\, \vec{e_1} \in G$ με $\vec{e_1} \neq \vec{0}$.
Τότε $\{\vec{e_1}\}$ Γ.Α και $\{\vec{e_1}\} \subseteq G$ σύνολο γεννητόρων $|G| < \infty$
Τότε από το προηγούμενο θεώρημα, θέτοντας $F = \{\vec{e_1}\}$, έπεται ότι υπάρχει βάση του E: $\{\vec{e_1}\} \subseteq B \subseteq G$ και προφανώς $|B| < \infty$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω E: πεπερασμένα παραγόμενος $\mathbb{K}$-δχ Τότε:
① Αν $E = \{\vec{0}\}$, ορίζουμε τη διάσταση του E να είναι $\dim_{\mathbb{K}} E = 0$

Αν $\lambda_1(\vec{e_1}, 0) + \dots + \lambda_n(\vec{e_n}, \vec{0}) + k_1(\vec{0}, \vec{\varepsilon_1}) + \dots + k_m(\vec{0}, \vec{e_m}) = \vec{0}_{E\times F} = (\vec{0}\vec{0})$

$\Rightarrow (\lambda_1\vec{e_1} + \dots + \lambda_n\vec{e_n}) \; k_1\vec{\varepsilon_1} + \dots + k_m\vec{e_m} = (\vec{0}\vec{0})$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1\vec{e_1} + \dots + \lambda_n\vec{e_n} = \vec{0} \; \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\} \text{ Γ.Α} \\ k_1\vec{e_1} + \dots + k_m\vec{e_m} = \vec{0} \; \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_m}\} \text{ Γ.Α} \end{cases}$

Άρα D: Γ.Α

Επομένως D: Βάση του $E\times F$ και άρα:

$\dim_{\mathbb{K}}(E\times F) = |D| = n + m = \dim_{\mathbb{K}} E + \dim_{\mathbb{K}} F$

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u> ① $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}_5[x]) = \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4 + \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_5[x] = 4 + 6 = 10$

② $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}^4) = \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3 + \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^4 = 3 + \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C})$

$= 3 + \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} + \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} + \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} + \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} =$

$= 3 + 2\cdot 4 = 3 + 8 = 11$

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u> Αν $E_1, \dots, E_n$: $\mathbb{K}$-δ.χ και $\dim_{\mathbb{K}} E_i = m_i$, $1 \le i \le n$, τότε:

$\dim_{\mathbb{K}}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) = \dim_{\mathbb{K}} E_1 + \dim_{\mathbb{K}} E_2 + \dots + \dim_{\mathbb{K}} E_n$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> Έστω E: $\mathbb{K}$δχ και $\dim_{\mathbb{K}} E = n$

(α) Κάθε Γ.Α σύνολο διανυσμάτων του E έχει $\le n$ στοιχεία

(β) Κάθε σύνολο γεννητόρων του E έχει $\ge n$ στοιχεία

(γ) Κάθε σύνολο διανυσμάτων του E με $> n$ στοιχεία είναι Γ.Ε

(δ) Αν B είναι ένα σύνολο διανυσμάτων του E, τότε το B είναι βάση του E $\Leftrightarrow$ ικανοποιεί 2 από τις 3 ακόλουθες

① B: Γ.Α

② $\langle B \rangle = E$

③ $|B| = \dim_{\mathbb{K}} E = n$

<u>Απόδειξη</u> (α) έχουμε αποδείξει (επειδή $\dim_{\mathbb{K}} E = n \Rightarrow$ ο E έχει μια βάση με n στοιχεία $\Rightarrow$ κάθε Γ.Α σύνολο διανυσμάτων του E έχει $\le n$ στοιχεία)

(β) Αν $G \subseteq E$ με $\langle G \rangle = E$ και $|G| < n$ τότε γνωρίζουμε ότι το G περιέχει μια βάση B' του E. Τότε $|B'| = \dim_{\mathbb{K}} E = n$. Όμως $B' \subseteq G \Rightarrow$

$n = |B'| \leq |G'| < n$ άτοπο. Αρα $|G| \geq n$

(γ) είναι ισοδύναμο με το α

(δ) ①+② ⇒ B: Βάση από τον ορισμό της Βάσης

①+③ ⇒ B: Γ.Α ⇒ Το B επεκτείνεται σε μια Βάση Y του E τότε

$|Y| = n = \dim_{\mathbb{K}} E = |B|$ και $B \subseteq Y$ ⇒ $B = Y$: Βάση

②+③ $\langle B \rangle = E$ ⇒ ∃ Βάση D του E με $D \subseteq B$ ⇒ $|D| \leq |B|$

$|B| = n = \dim_{\mathbb{K}} E$ όμως $|D| = \dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} B$ ⇒ $D = B$ Βάση

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Στον $\mathbb{K}$-δχ $\mathbb{K}_n[x]$, το υποσύνολο $C = \{1, (x-\alpha), (x-\alpha)^2, \ldots, (x-\alpha)^n\}$ Βάση. Γνωρίζουμε ότι το C: Γ.Α. Επειδή $|C| = n+1 = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[x]$, από το Θεώρημα έπεται ότι C: Βάση.

ΓΕΝΙΚΟΤΕΡΑ αν $C: \{P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)\} \subseteq \mathbb{K}_n[x]$ όπου deg $P_i(x) = i$, $0 \leq i \leq n$. Τότε C: Βάση του $\mathbb{K}_n[x]$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω E: $\mathbb{K}$δχ και $\dim_{\mathbb{K}} E = n$. Αν V: υπόχωρος του E τότε:

① Ο V έχει πεπερασμένη διάσταση και μάλιστα:

$$\dim_{\mathbb{K}} V \leq \dim_{\mathbb{K}} E$$

② $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} E \iff V = E$

8/12/2016

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω E: $\mathbb{K}$-δ.χ και υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} E = n < \infty$

Αν V είναι ένας υπόχωρος του E. Τότε:

① Ο V έχει πεπερασμένη διάσταση και $\dim_{\mathbb{K}} V \leq \dim_{\mathbb{K}} E$

② $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} E \Leftrightarrow V = E$

Απόδειξη ① Αν $V = \{\vec{0}\}$, τότε προφανώς $\dim_{\mathbb{K}} V = 0$ και ο V έχει πεπερασμένη διάσταση. Έστω ότι $V \neq \{\vec{0}\}$. Τότε ο V περιέχει τουλάχιστον ένα διάνυσμα $\vec{x} \neq \vec{0}$ το οποίο τότε είναι Γ.Α διανύσματα, τα οποία προφανώς είναι Γ.Α διανύσματα του E. Για κάθε Γ.Α σύνολο διανυσμάτων T του V θα έχουμε $|T| \leq n = \dim_{\mathbb{K}} E$. Έστω $S = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m\}$ το υποσύνολο του V με το μεγαλύτερο πλήθος Γ.Α διανυσμάτων. Τότε $|S| = m \leq n$ Θδο: S Βάση του V Επειδή S: Γ

8/12/2017

αρκεί νδο $<S> = V$. Εστω ότι $<S> \neq V$. Τότε $\exists \vec{y} \in V : \vec{y} \notin <S>$

Το υποσύνολο $S \cup \{\vec{y}\}$ είναι Γ.Ε διότι έχει $m+1$ στοιχεία και το υποσύνολο του V με το μεγαλύτερο πλήθος Γ.Α διανυσμάτων έχει m στοιχεία. Επειδή το $S \cup \{\vec{y}\}$: Γ.Ε, S: ΓΑ | Γνωστή Πρόταση | $\vec{y} \in <S>$: άτοπο, διότι $\vec{y} \notin <S>$

Άρα $<S> = V$. Επομένως S: Βάση του V και άρα $\dim_{\mathbb{K}} V = |S| = m \leq n$

② Προφανώς $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} E$, αν $V = E$. Αντίστροφα, έστω $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} E = n$

Έστω $B = \{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}\}$: Βάση του V. Τότε B: ΓΑ υποσύνολο του E. Επειδή $|B| = n = \dim_{\mathbb{K}} E$, έπεται ότι είναι Βάση του E. Τότε, $\forall \vec{x} \in E$:

ΑΠΟΔΕΙΞΗ $\vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \ldots + \lambda_n \vec{e_n}$, Όμως $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n} \in V$ $\Rightarrow$ $\vec{x} \in V$. Άρα $E \subseteq V$, δηλαδή $V = E$

Αν $V, W \subseteq E$ είναι υπόχωροι του E, τότε: $V \cap W$: υπόχωρος του E

$$V + W = \{\vec{x} + \vec{y} \in E \mid \vec{x} \in V, \vec{y} \in W\}$$

υπόχωρος του E.

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω E: $\mathbb{K}$-δ.χ πεπερασμένης διάστασης και V, W δύο υπόχωροι του E. Τότε $\dim_{\mathbb{K}}(V+W) = \dim_{\mathbb{K}} V + \dim_{\mathbb{K}} W - \dim_{\mathbb{K}}(V \cap W)$

Σκιαγράφηση Απόδειξης Έστω: $f_1, \ldots, f_k$ Βάση της $V \cap W \subseteq W$, $\subseteq V$

Συμπληρώνουμε το Γ.Α υποσύνολο $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_k}\}$ σε:

① μια Βάση $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_k}, \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}\}$ του V

② μια Βάση $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_k}, \vec{\varepsilon_1}, \ldots, \vec{\varepsilon_m}\}$ του W

Ισχυρισμός Το υποσύνολο $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_k}, \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}, \vec{\varepsilon_1}, \ldots, \vec{\varepsilon_m}\}$ είναι βάση του $V+W$ (ΑΣΚΗΣΗ)

Τότε $\dim_{\mathbb{K}}(V+W) = k+n+m$ $\dim_{\mathbb{K}} V + \dim_{\mathbb{K}} W - \dim(V \cap W) =$

$\cancel{k} + n + k + m - \cancel{k} = k + n + m$

ΑΣΚΗΣΗ: $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1-2x_2+x_3-x_4=0\}\subseteq\mathbb{R}^4$

ΝΔΟ το V: υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ και να βρεθεί μια Βάση του V

Λ: $\{(x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}^4 \mid x_4=x_1-2x_2+x_3\}=$

$=\{(x_1,x_2,x_3,x_1-2x_2+x_3)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}=$

$=\{(x_1,0,0,x_1)+(0,x_2,0,-2x_2)+(0,0,x_3,x_3)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$

$=\{x_1\underbrace{(1,0,0,1)}_{\vec{\varepsilon_1}}+x_2\underbrace{(0,1,0,-2)}_{\vec{\varepsilon_2}}+x_3\underbrace{(0,0,1,1)}_{\vec{\varepsilon_3}}\in\mathbb{R}^4 \mid x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}=$

$=\langle\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_3}\rangle$

Εύκολα βλέπουμε ότι $\{\vec{e_1},\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_3}\}$: ΓΑ και άρα είναι Βάση του V:

Επομένως $\dim_{\mathbb{R}}V=3$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑΣ Έστω

$\vec{x_1}=(\alpha_{11},\alpha_{12},\dots\alpha_{1n})$ ... Τότε το σύνολο $\{\vec{x_1},\dots\vec{x_n}\}$: ΓΑ $\Leftrightarrow$

$\vec{x_2}=(\alpha_{21},\alpha_{22},\dots\alpha_{2n})\in\mathbb{K}^n$ το σύνολο $\{\vec{x_1},\dots\vec{x_n}\}$ Βάση του

$\vdots$

$\vec{x_n}=(\alpha_{n1},\alpha_{n2},\dots\alpha_{nn})$

$\mathbb{K}^n \Leftrightarrow \begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$

$\lambda_1\vec{x_1}+\dots+\lambda_n\vec{x_n}=\vec{0}\Rightarrow$

$\lambda_1(\alpha_{11},\alpha_{12},\dots\alpha_{1n})+\dots+\lambda_n(\alpha_{n1},\alpha_{n2},\dots\alpha_{nn})=(0,\dots,0)\Leftrightarrow$

$(\lambda_1\alpha_{11}+\dots+\lambda_n\alpha_{1n}+\dots,\lambda_1\alpha_{1n}+\dots+\lambda_n\alpha_{nn})=(0,\dots,0)\Leftrightarrow^{(\Sigma)}$

$\begin{cases}\lambda_1\alpha_{11}+\dots+\lambda_n\alpha_{n1}=0\\ \vdots\\ \vdots\\ \lambda_1\alpha_{1n}+\dots+\lambda_n\alpha_{nn}=0\end{cases}$

Άρα τα $\vec{x_1},\dots\vec{x_n}$: ΓΑ $\Leftrightarrow$ το ομογενές σύστημα (Σ) έχει την μηδενική λύση $\lambda_1=\dots=\lambda_n=0 \Leftrightarrow$ η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών του (Σ) είναι $\neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{n1}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_{1n} & \dots & \alpha_{nn}\end{vmatrix}\neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$

$\vec{x}_1 = (\alpha_{11}, \dots \alpha_{1n})$ Θέλουμε να βρούμε μια βάση του $\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \rangle$

$\vdots$

$\vec{x}_m = (\alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mn})$

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$ Έστω ότι η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του A είναι

ο πίνακας $A' = \begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \dots & \alpha'_{1n} \\ \alpha'_{m1} & \dots & \alpha'_{mn} \end{pmatrix}$ Έστω τα διανύσματα:

$\vec{x}_1 = (\alpha'_{11}, \dots \alpha'_{1n})$ Τότε: $\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \rangle = \langle \vec{x}'_1, \dots, \vec{x}_m \rangle$

$\vec{x}_m = (\alpha'_{m1}, \dots \alpha'_{mn})$

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ</u> Έστω στον K^n τα Τ.Α διανύσματα:

ΑΣΚΗΣΗ $\vec{x_1} = (1,2,3,4)$ Να βρεθεί μια βάση του $\langle \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \vec{x_4} \rangle$

$\vec{x_2} = (0,1,2,3)$

$\vec{x_3} = (1,-1,-1,1)$

$\vec{x_4} = (1,3,3,1)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$ Πράξεις στις γραμμές

Τότε $\langle \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \vec{x_4} \rangle$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Θέτοντας $\vec{x_1}' = (1,0,0,1)$ $= \langle \vec{x_1}', \vec{x_2}', \vec{x_3}' \rangle$

$\vec{x_2}' = (0,1,0,-3)$

$\vec{x_3}' = (0,0,1,3)$

$\lambda_1 \vec{x_1}' + \lambda_2 \vec{x_2}' + \lambda_3 \vec{x_3}' = 0 \Rightarrow \lambda_1(1,0,0,1) + \lambda_2(0,1,0,-3) + \lambda_3(0,0,1,3) = (0,0,0,0)$

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1 - 3\lambda_2 + 3\lambda_3) = (0,0,0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow \vec{x_1}', \vec{x_2}', \vec{x_3}'$ Γ.Α

και άρα βάση του $\langle \vec{x_1}', \vec{x_2}', \vec{x_3}' \rangle = \langle \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \vec{x_4} \rangle$

ΑΣΚΗΣΗ Έστω $\vec{x_1} = (1,1,1,\alpha)$

$\vec{x_2} = (1,0,1,b) \in \mathbb{R}^4$ όπου $\alpha, b, c \in \mathbb{R}$ Να βρεθεί

$\vec{x_3} = (-2,2,-2,c)$ μια βάση του $\langle \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3} \rangle$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & 1 & b \\ -2 & 2 & -2 & c \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{στις γραμμές}]{\text{πράξεις}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \alpha - b \\ 0 & 0 & 0 & c - 2\alpha + b \end{pmatrix}$$

① Αν $c - 2\alpha + b \neq 0$. Τότε η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του A είναι η

$$A' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & \alpha - b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Θέτουμε

$\vec{x_1}' = (1,0,1,b)$ Τότε: $\langle \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3} \rangle$

$\vec{x_2}' = (0,1,0,\alpha - b)$ $= \langle \vec{x_1}', \vec{x_2}', \vec{x_3}' \rangle$

$\vec{x_3}' = (0,0,0,1)$

$\lambda_1 \vec{x_1}' + \lambda_2 \vec{x_2}' + \lambda_3 \vec{x_3}' = \vec{0}$

$\Rightarrow \lambda_1(1,0,1,b) + \lambda_2(0,1,0,\alpha - b) + \lambda_3(0,0,0,1) = (0,0,0,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_1 b + \lambda_2(\alpha - b) + \lambda_3) = (0,0,0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow \{\vec{x_1}', \vec{x_2}', \vec{x_3}'\}$: ΓΑ και άρα είναι βάση του $\langle \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3} \rangle$

Scanned by CamScanner

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & \alpha-b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ Θέτοντας $\vec{x_4}' = (0,0,1,0)$, η τετράδα $\{\vec{x_1}', \vec{x_2}', \vec{x_3}', \vec{x_4}'\}$: Βάση του $\mathbb{R}^4$

② Αν $c-2\alpha+b=0$ τότε $A \underset{\text{στις γραμμές}}{\overset{\text{πράξεις}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \alpha-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Τότε όπως και πριν

Θέτοντας $\vec{x_1}' = (1,1,1,\alpha)$ Τότε $\langle \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3} \rangle = \langle \vec{x_1}', \vec{x_2}' \rangle$
$\vec{x_2}' = (0,1,0,\alpha-b)$

Εύκολα τα $\vec{x_1}', \vec{x_2}'$ Τ.Α και άρα Βάση του $\langle \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3} \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \alpha-b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ΑΛΛΑΓΗ ΒΑΣΗΣ

Έστω E: $\mathbb{K}$-δ.χ με $\dim_{\mathbb{K}} E = n$. Έστω $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots \vec{e_n}\}$ Βάση του E
$B' = \{\vec{e_1}', \vec{e_2}', \ldots, \vec{e_n}'\}$ Βάση του E

$$\begin{cases} \vec{e_1}' = \alpha_{11}\vec{e_1} + \alpha_{21}\vec{e_2} + \ldots + \alpha_{n1}\vec{e_n} \\ \vdots \\ \vec{e_n}' = \alpha_{1n}\vec{e_n} + \alpha_{2n}\vec{e_2} + \ldots + \alpha_{nn}\vec{e_n} \end{cases}$$

Ο πίνακας μετά βάσης από την Βάση B στην Βάση B' ορίζεται να είναι ο

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{2n} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Παρόμοια ορίζεται ο πίνακας μετά βάσης Q από τη B' στην B

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ποια είναι η σχέση των πινάκων P, Q;

Έστω $\vec{x} \in E$ Τότε: $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \ldots + x_n\vec{e_n}$
$\vec{x} = x_1'\vec{e_1}' + \ldots + x_n'\vec{e_n}'$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ (ΘΕΔ) Εστω $f: E \to F$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου E, F: K-δχ και $\dim_{\mathbb{K}} E < \infty$ Τότε:

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} Ker(f) + \dim_{\mathbb{K}} Im(f)} \;*$$

Απόδειξη: Επειδή $\dim_{\mathbb{K}} E < \infty$, έπεται ότι $\dim_{\mathbb{K}} Ker(f) < \infty$, διότι ο $Ker(f)$ είναι υπόχωρος του E. Εστω $B = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$: Βάση του E. Τότε: $Im(f) = \langle f(\vec{e_1}), \dots f(\vec{e_2}) \rangle$ Προφανώς $\langle f(\vec{e_1}), \dots f(\vec{e_2}) \rangle \subseteq Im(f)$, διότι $f(\vec{e_1}), \dots f(\vec{e_n}) \in Im(f)$ και η $Im(f)$: υπόχωρος του F. Εστω $\vec{y} \in Im(f)$ Τότε: $\exists \vec{x} \in E: f(\vec{x}) = \vec{y}$ Όμως B: Βάση του $E \Rightarrow \exists\, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n}$ Τότε $\vec{y} = f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e_1}) + \dots + x_n f(\vec{e_n}) \in \langle f(\vec{e_1}), \dots, f(\vec{e_n}) \rangle$ Άρα ~~$Im(f) \subseteq$~~ $Im(f) \subseteq \langle f(\vec{e_1}), \dots, f(\vec{e_n}) \rangle$ Άρα $Im(f) = \langle f(\vec{e_1}), \dots, f(\vec{e_2}) \rangle$
$\Rightarrow$ ο $Im(f)$ πεπερασμένα παραγόμενος $\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} Im(f) < \infty$
Εστω $C = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_k}\}$ Βάση του $Ker(f)$. Γνωρίζουμε τότε η Βάση C συμπληρώνεται σε μια Βάση $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_{k+1}}, \dots \vec{e_n}\}$ του E

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ Το σύνολο $D = \{f(\vec{e_{k+1}}), \dots f(\vec{e_n})\}$ Βάση της $Im(f)$

Αποδ. του ισχυρισμού: Δείξαμε ότι $Im(f) = \langle f(\vec{e_1}), \dots f(\vec{e_k}), f(\vec{e_{k+1}}), \dots f(\vec{e_n}) \rangle$
Επειδή $\vec{e_1}, \dots \vec{e_k} \in Ker(f) \Rightarrow f(\vec{e_1}) = \dots = f(\vec{e_k}) = \vec{0}$ και άρα
$Im(f) = \langle f(\vec{e_{k+1}}), \dots, f(\vec{e_n}) \rangle$ (1)
Εστω ότι: $\lambda_{k+1} f(\vec{e_{k+1}}) + \dots + \lambda_n f(\vec{e_n}) = \vec{0} \Rightarrow f(\lambda_{k+1}\vec{e_{k+1}} + \dots + \lambda_n\vec{e_n}) = \vec{0} \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda_{k+1}\vec{e_{k+1}} + \dots + \lambda_n\vec{e_n} \in Ker(f)$. Επειδή το σύνολο $\{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_k}\}$ Βάση του $Ker(f) \Rightarrow \exists\, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{K}: \lambda_{k+1}\vec{e_{k+1}} + \dots + \lambda_n\vec{e_n} = x_1\vec{e_1} + \dots + x_k\vec{e_k} \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1\vec{e_1} + \dots + x_k\vec{e_k} + (-\lambda_{k+1})\vec{e_{k+1}} + \dots + (-\lambda_n)\vec{e_n} = \vec{0}$ Επειδή το σύνολο $\{\vec{e_1}, \dots \vec{e_k}, \vec{e_{k+1}}, \dots \vec{e_n}\}$: Βάση του E, έπεται ότι $x_1 = \dots = x_k = \lambda_{k+1} = \dots =$
Άρα το σύνολο $\{f(\vec{e_{k+1}}), \dots, f(\vec{e_n})\}$: Γ.Α (2) Από τις (1) κ' (2) $\Rightarrow$ Ισχυρισμό
$\dim_{\mathbb{K}} Ker(f) + \dim_{\mathbb{K}} Im(f) = |C| + |D| = k + n - k = n = |B| = \dim_{\mathbb{K}} E$ (*)

ΟΡΙΣΜΟΣ Αν $f: E \to F$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε η Βαθμίδα της f ορίζεται να είναι ο αριθμός: $\boxed{r(f) = \dim_{\mathbb{K}} Im(f)}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Εστω $f: E \to F$ μια γραμμική απεικόνιση, και $\dim_{\mathbb{K}} E < \infty$ $\dim_{\mathbb{K}} F < \infty$. Τότε: $r(f) \leq \min\{\dim_{\mathbb{K}} E, \dim_{\mathbb{K}} F\}$

• $Im(f)$: υπόχωρος του $F \Rightarrow r(f) = \dim_{\mathbb{K}} Im(f) \leq \dim_{\mathbb{K}} F$

• (ΘΕΔ) $\Rightarrow r(f) = \dim_{\mathbb{K}} E - \dim_{\mathbb{K}} Ker(f) \leq \dim_{\mathbb{K}} E$

$r(f) \leq \dim_{\mathbb{K}} \{\dim_{\mathbb{K}} E, \dim_{\mathbb{K}} F\}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Έστω $f: E \to F$ γραμμική απεικόνιση και $\begin{cases} \dim_{\mathbb{K}} E < \infty \\ \dim_{\mathbb{K}} F < \infty \end{cases}$

① $r(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$, δηλαδή η f είναι η μηδενική γραμμική απεικόνιση.

② Η f: επιμορφισμός $\Leftrightarrow r(f) = \dim_{\mathbb{K}} F$

③ Η f: μονομορφισμός $\Leftrightarrow r(f) = \dim_{\mathbb{K}} E$

④ Η f: ισομορφισμός $\Leftrightarrow r(f) = \dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} F$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x+y+z, x+2y-z, 2x+3y)$

Εύκολα βλέπουμε ότι η f είναι γραμμική. Θα υπολογίσουμε $\dim_{\mathbb{K}} Ker(f), r(f)$

$(x,y,z) \in Ker(f) \Leftrightarrow f(x,y,z) = \vec{0} \Leftrightarrow (x+y+z, x+2y-z, 2x+3y) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y-z=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$ $\Rightarrow y-2z=0 \Rightarrow y=2z$ $\Rightarrow 2x+6z=0 \Rightarrow x+3z=0 \Rightarrow x=-3z$

Άρα: $(x,y,z) \in Ker(f) \Leftrightarrow (x,y,z) = (-3z, 2z, z)$

Άρα $Ker(f) = \{(-3z, 2z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} = \langle (-3,2,1) \rangle$

Άρα το $\{(-3,2,1)\}$ βάση του $Ker(f) \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} Ker(f) = 1$

(ΘΕΔ): $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = \dim_{\mathbb{R}} Ker(f) + r(f) \Rightarrow 3 = 1 + r(f) \Rightarrow r(f) = 2$

$\{(-3,2,1)\}$ βάση του $Ker(f)$. Συμπληρώνουμε το $(-3,2,1)$ σε μια βάση του $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \{(-3,2,1),(0,1,0),(0,0,1)\}$$ βάση του $\mathbb{R}^3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Τότε το σύνολο $\{f(0,1,0), f(0,0,1)\}$: βάση της $Im(f)$ και:

$f(0,1,0) = (1,2,3)$ Άρα $\{(1,2,3),(1,-1,0)\}$ βάση της $Im(f)$

$f(0,0,1) = (1,-1,0)$ και τότε $\{(1,2,3),(1,-1,0),(1,0,0)\}$ βάση του $\mathbb{R}^3$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Α V, W : υπόχωροι του $\mathbb{K}$-δ.χ E και $\dim_{\mathbb{K}} E < \infty$ τότε:

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}}(V+W) = \dim_{\mathbb{K}} V + \dim_{\mathbb{K}} W - \dim_{\mathbb{K}}(V\cap W)} \ *$$

Απόδειξη: Θεωρούμε του $\mathbb{K}$-δ.χ $V\times W = \{(\vec{x},\vec{y}) \mid \vec{x}\in V, \vec{y}\in W\}$ και τότε γνωρίζουμε ότι: $\dim(V\times W) = \dim_{\mathbb{K}} V + \dim_{\mathbb{K}} W$. Ορίζουμε απεικόνιση

$$f: V\times W \to V+W, \quad f(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}+\vec{y}$$

$f[(\vec{x_1},\vec{y_1})+(\vec{x_2},\vec{y_2})] = f[(\vec{x_1}+\vec{x_2}),(\vec{y_1}+\vec{y_2})] = \vec{x_1}+\vec{x_2}+\vec{y_1}+\vec{y_2} = (\vec{x_1}+\vec{y_1})+(\vec{x_2}+\vec{y_2}) =$
$= f(\vec{x_1},\vec{y_1}) + f(\vec{x_2},\vec{y_2})$

• $f(\lambda(\vec{x},\vec{y})) = f(\lambda\cdot\vec{x},\lambda\vec{y}) = \lambda\vec{x}+\lambda\vec{y} = \lambda(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda\cdot f(\vec{x},\vec{y})$ $\Rightarrow$ f: γραμμική

(ΘΕΔ) $\Rightarrow$ $\dim_{\mathbb{K}}(V\times W) = \dim_{\mathbb{K}} Ker(f) + \dim_{\mathbb{K}} Im(f) \Longrightarrow$
$\dim_{\mathbb{K}} V + \dim_{\mathbb{K}} W = \dim_{\mathbb{K}} Ker(f) + \dim_{\mathbb{K}} Im(f)$

Η f είναι επιμορφισμός διότι $\forall\, \vec{x}+\vec{y}\in V+W$, $\exists (\vec{x},\vec{y})\in V\times W: f(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}+\vec{y}$

Άρα $Im(f) = V+W$ και τότε $\dim_{\mathbb{K}} Im(f) = \dim_{\mathbb{K}}(V+W)$. Επομένως
$\dim_{\mathbb{K}} V + \dim_{\mathbb{K}} W = \dim_{\mathbb{K}} Ker(f) + \dim_{\mathbb{K}}(V+W)$

$Ker(f) = \{(\vec{x},\vec{y})\in V\times W \mid f(\vec{x},\vec{y}) = \vec{0}\} = \{(\vec{x},\vec{y})\in V\times W \mid \vec{x}+\vec{y} = \vec{0}\} =$
$= \{(\vec{x},\vec{y})\in V\times W \mid \vec{y} = -\vec{x}\} = \{(\vec{x},-\vec{x})\in V\times W \mid \vec{x}\in V\cap W\}$

Απόδειξη: Ορίζουμε απεικόνιση

$h: V\cap W \to Ker(f)$, $h(\vec{x}) = (\vec{x},-\vec{x})$ η οποία από τον τύπο της εύκολα είναι γραμμική, και επιπλέον:

$Ker(h) = \{\vec{x}\in V\cap W \mid h(\vec{x}) = (\vec{0},\vec{0})\} = \{\vec{x}\in V\cap W \mid (\vec{x},-\vec{x}) = (\vec{0},\vec{0})\} = \{\vec{0}\}$

$\Rightarrow$ h: μονομορφισμός. Επίσης η h επιμορφισμός, διότι $\forall (\vec{x},-\vec{x})\in Ker(f)$: $h(\vec{x}) = (\vec{x},-\vec{x})$. Άρα h ισομορφισμός $\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} Ker(f) = \dim_{\mathbb{K}}(V\cap W)$ (4)

ΘΕΩΡΗΜΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΕΠΕΚΤΑΣΗΣ (ΘΓΕ) Έστω E: $\mathbb{K}$-δ.χ και

"Ο ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΙΑΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ"

Έστω E, F : Κ.δ.χ και $f: E \to F$ μια γραμμική απεικόνιση.

Έστω $\begin{cases} B_E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\} : \text{Βάση του } E \\ B_F = \{\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \dots, \vec{\varepsilon_n}\} \text{ Βάση του } F \end{cases}$

$$\begin{cases} f(\vec{e_1}) = \alpha_{11}\vec{\varepsilon_1} + \alpha_{21}\vec{\varepsilon_2} + \dots + \alpha_{m1}\vec{\varepsilon_m} \\ \vdots \\ f(\vec{e_n}) = \alpha_{1n}\vec{\varepsilon_1} + \alpha_{2n}\vec{\varepsilon_2} + \dots + \alpha_{mn}\vec{\varepsilon_m} \end{cases}$$

$$\boxed{f(\vec{e_j}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\vec{\varepsilon_i} \qquad 1 \le j \le n}$$

$$M_{B_E}^{B_F}(f) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας $M_{B_E}^{B_F}(f)$ καλείται ο πίνακας της f ως προς τις βάσεις B_E και B_F. Αν $E = F$, τότε ο πίνακας $M_{B_E}^{B_E}(f)$ καλείται ο πίνακας της f ως προς την βάση B_E

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ η $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $f(x,y,z) = (x+2y,\ y-z,\ x+2z)$

$B = \{\vec{e_1} = (1,0,0),\ \vec{e_2} = (0,1,0),\ \vec{e_3} = (0,0,1)\}$ | $M_B^{B'}(f)$, $M_{B'}^{B}(f)$

$B' = \{\vec{\varepsilon_1} = (0,1,1),\ \vec{\varepsilon_2} = (1,0,1),\ \vec{\varepsilon_3} = (1,1,0)\}$ | $M_B^B(f)$, $M_{B'}^{B'}(f)$

① $M_B^{B'}(f) = ;$

$f(\vec{e_1}) = f(1,0,0) = (1,0,1) = 0\cdot\vec{\varepsilon_1} + 1\cdot\vec{\varepsilon_2} + 0\cdot\vec{\varepsilon_3}$

$f(\vec{e_2}) = f(0,1,0) = (2,1,0) = \alpha\vec{\varepsilon_1} + \beta\vec{\varepsilon_2} + \gamma\vec{\varepsilon_3} = \alpha(0,1,1) + \beta(1,0,1) + \gamma(1,1,0)$

$= (\beta+\gamma, \alpha+\gamma, \alpha+\beta) \Longrightarrow \begin{cases} \beta+\gamma = 2 \\ \alpha+\gamma = 1 \\ \alpha+\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2},\ \beta = \frac{1}{2},\ \gamma = \frac{3}{2}$

Άρα το $\boxed{f(\vec{e_2}) = -\frac{1}{2}\vec{\varepsilon_1} + \frac{1}{2}\vec{\varepsilon_2} + \frac{3}{2}\vec{\varepsilon_3}}$

$f(\vec{e_3}) = f(0,0,1) = (0,-1,2) \Rightarrow \boxed{f(\vec{e_3}) = \frac{1}{2}\vec{\varepsilon_1} + \frac{3}{2}\vec{\varepsilon_2} - \frac{3}{2}\vec{\varepsilon_3}}$

09/01/2018

$f(\vec{\varepsilon_1}) = f(0,1,1) = (2,0,2) = 2\vec{e_1} + 0\cdot\vec{e_2} + 2\vec{e_3}$

$f(\vec{\varepsilon_2}) = f(1,0,1) = (1,-1,3) = 1\vec{e_1} - 1\vec{e_2} + 3\vec{e_3}$

$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$

$f(\vec{\varepsilon_1}) = f(0,1,1) = (2,0,2) = 2\vec{e_1} + 0\vec{e_2} + 2\vec{e_3}$

$f(\vec{\varepsilon_2}) = f(1,0,1) = (1,-1,3) = 1\vec{e_1} - 1\vec{e_2} + 3\vec{e_3}$

$f(\vec{\varepsilon_3}) = f(1,1,0) = (3,1,1) = 3\vec{e_1} + 1\vec{e_2} + 1\vec{e_3}$

$$\boxed{M_{B'}^{B}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}$$

③ $M_B^B(f) = ;$

$f(\vec{e_1}) = (1,0,1) = 1\vec{e_1} + 0\cdot\vec{e_2} + 1\vec{e_3}$

$f(\vec{e_2}) = (2,1,0) = 2\vec{e_1} + 1\vec{e_2} + 0\vec{e_3}$

$f(\vec{e_3}) = (0,-1,2) = 0\vec{e_1} - 1\vec{e_2} + 2\vec{e_3}$

$$\boxed{M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

④ $Ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (0,0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+2z, y-z, x+2z) = (0,0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{matrix} x+2z=0 \\ y-z=0 \\ x+2z=0 \end{matrix}\}$

$= \{(-2z, z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(-2,1,1) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$ Άρα $Ker(f) = \langle(-2,1,1)\rangle$ Άρα το διάνυσμα $\vec{e_1}' = (-2,1,1)$: Βάση του $ker(f)$.

Θέτοντας $\vec{e_2}' = (0,1,0)$, $\vec{e_3}' = (0,0,1)$ έπεται

$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$ ότι $B = \{\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}'\}$: Βάση του $\mathbb{R}^3$

Γνωρίζουμε επίσης τότε ότι $\{f(\vec{e_2}'), f(\vec{e_3}')\}$: Βάση της $Im(f)$ Τότε $f(\vec{e_2}) = (2,1,0)$ $f(\vec{e_3}) = (0,-1,2)$ Συμπληρώνουμε τα διανύσματα $f(\vec{e_2}') = \vec{\varepsilon_2}'$ $f(\vec{e_3}') = \vec{\varepsilon_3}'$ σε μια βάση του $\mathbb{R}^3$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow B' = \{\vec{\varepsilon_1}' = (1,0,0), \vec{\varepsilon_2}', \vec{\varepsilon_3}'\}$

$M_B^{B'}(f) = ;$

$f(\vec{e_1}') = \vec{0}\vec{\varepsilon_1}' + 0\cdot\vec{\varepsilon_2}' + 0\vec{\varepsilon_3}'$

$f(\vec{e_2}') = \vec{\varepsilon_2}' = 0\cdot\vec{\varepsilon_1}' + 1\cdot\vec{\varepsilon_2}' + 0\vec{\varepsilon_3}'$

$f(\vec{e_3}') = \vec{\varepsilon_2}' = 0\vec{\varepsilon_1}' + 0\vec{\varepsilon_2}' + 1\vec{\varepsilon_2}'$

$$\Rightarrow \boxed{M_B^{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ① Γενικά: $M_{B'_E}^{B_F}(f) \neq M_{B'_E}^{B'_F}(f)$

Παρόμοια αν $E=F$ τότε $M_{B_E}^{B_F}(f) \neq M_{B_F}^{B_E}(f)$

② Έστω $f,g: E \to F$ γραμμικές απεικονίσεις και $\begin{cases} B_E = \{\vec{e_1}, \dots \vec{e_n}\}: \text{Βάση του } E \\ B_F = \{\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_m}\} \text{ Βάση του } F \end{cases}$

Τότε $M_{B_E}^{B_F}(f) = M_{B_E}^{B_F}(g) \Leftrightarrow f=g$

$M_{B_E}^{B_F}(f) = A = (\alpha_{ij}), \; M_{B_E}^{B_F}(g) = B = (B_{ij})$

$$\boxed{\begin{aligned} f(\vec{e_j}) &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\vec{\varepsilon_i} \quad 1 \le j \le n \\ g(\vec{e_j}) &= \sum_{i=1}^{m} B_{ij}\vec{\varepsilon_i} \end{aligned}}$$

Αν $M_{B_E}^{B_F} = M_{B_E}^{B_F}(g) \Rightarrow A = (\alpha_{ij}) = (B_{ij}) = B \Rightarrow \alpha_{ij} = B_{ij}$ $\quad 1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ $\Rightarrow$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} f(\vec{e_j}) = g(\vec{e_j}), \; 1 \le j \le n \Rightarrow f=g$

③ $O: E \to F \quad O(\vec{x}) = \vec{0}$: η μηδενική γραμμική απεικόνιση

Τότε $M_{B_E}^{B_F}(O) = O$ ο μηδενικός $m \times n$ πίνακας)

Έστω $E=F$ και $Id_E: E \to E \quad Id_E(\vec{x}) = \vec{x}$

$M_{B_E}^{B_F}(Id_E)$: $Id(\vec{e_1}) = \vec{e_1} = \alpha_{11}\vec{\varepsilon_1} + \alpha_{21}\vec{\varepsilon_2} + \dots + \alpha_{m1}\vec{\varepsilon_m}$

$\vdots$

$Id_E(\vec{e_n}) = \vec{e_n} = \alpha_{1m}\vec{\varepsilon_1} + \alpha_{2m}\vec{\varepsilon_2} + \dots + \alpha_{mn}\vec{\varepsilon_m}$

$M_{B_E}^{B_F}(Id_E) = M_{B_F}^{B_E}$

Προφανώς για Βάση B του E: $M_B^B(Id_E) = I_n$: ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας

διότι:

$$\left.\begin{aligned} Id_E(\vec{e_1}) &= \vec{e_1} = 1\vec{e_1} + 0\vec{e_2} + \dots + 0\vec{e_n} \\ &\vdots \\ Id_E(\vec{e_n}) &= \vec{e_n} = 0\cdot\vec{e_1} + 0\cdot\vec{e_2} + \dots + 1\cdot\vec{e_n} \end{aligned}\right| \Rightarrow M_B^B(Id_E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

Γενικά όμως αν B, C Βάσεις του E τότε: $M_B^C(Id_E) \neq I_n$

Παράδειγμα στον $\mathbb{R}^3$ $\quad B: \{\vec{e_1} = (1,0,0), \vec{e_2} = (0,1,0), \vec{e_3} = (0,0,1)\}$

$C: \{\vec{\varepsilon_1} = (0,1,1), \vec{\varepsilon_2} = (1,0,1), \vec{\varepsilon_3} = (1,1,0)\}$

09/01/2018

Τότε $M_C^B(I_{d\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ και $M_B^C(I_{d\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

④ Αν γνωρίζουμε τον πίνακα $M_{B_E}^{B_F}(f)$ της f ως προς ένα ζευγάρι βάσεων B_E, B_F, τότε γνωρίζουμε την f.

$M_{B_E}^{B_F}(f) = A = (\alpha_{ij})$ και γνωρίζουμε τον πίνακα $A=(\alpha_{ij})$ Τότε όμως από τις σχέσεις (✱) $\Rightarrow$ γνωρίζουμε τις τιμές $f(\vec{e_j})$ της f στην βάση $B_E = \{e_1, \dots e_n\}$ Όμως $\forall\, \vec{x} \in E: \vec{x} = x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n} \Rightarrow$

$f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e_1}) + \dots + x_n f(\vec{e_n}) \Rightarrow$ γνωρίζουμε την f.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Να βρεθεί η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ της οποίας ο πίνακας ως προς το ζευγάρι βάσεων:

$B = \{\vec{\varepsilon_1} = (0,1,1), \vec{\varepsilon_2} = (1,0,1), \vec{\varepsilon_3} = (1,1,0)\}$ είναι ο $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$C = \{\vec{n_1} = (1,1,0), \vec{n_2} = (2,0,-1), \vec{n_3} = (0,1,-1)\}$

$f(\vec{\varepsilon_1}) = 1\vec{n_1} + 2\vec{n_2} + 0\cdot\vec{n_3} = (5,1,-2)$

$f(\vec{\varepsilon_2}) = 2\vec{n_1} + 1\vec{n_2} + 1\vec{n_3} = (4,3,-2)$

$f(\vec{\varepsilon_3}) = 3\vec{n_1} + 7\vec{n_2} - \vec{n_3} = (17,2,-6)$

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3: (x,y,z) = \alpha\vec{\varepsilon_1} + \beta\vec{\varepsilon_2} + \gamma\vec{\varepsilon_3}$

$\alpha(0,1,1) + \beta(1,0,1) + \gamma(1,1,0) =$

$= (\beta+\gamma, \alpha+\gamma, \alpha+\beta) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \beta+\gamma = x \\ \alpha+\gamma = y \\ \alpha+\beta = z \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{-x+y+z}{2},\ \beta = \frac{x-y+z}{2},\ \gamma = \frac{x+y-z}{2}$$

Άρα: $(x,y,z) = \boxed{\frac{-x+y+z}{2}}\vec{\varepsilon_1} + \boxed{\frac{x-y+z}{2}}\vec{\varepsilon_2} + \boxed{\frac{x+y-z}{2}}\vec{\varepsilon_3}$

$f(x,y,z) = \frac{-x+y+z}{2} f(\vec{\varepsilon_1}) + \frac{x-y+z}{2} f(\vec{\varepsilon_2}) + \frac{x+y-z}{2} f(\vec{\varepsilon_3}) =$

$= \frac{-x+y+z}{2}(5,1,-2) + \frac{x-y+z}{2}(4,3,-2) + \frac{x+y-z}{2}(17,2,-6) =$

$= (8x+9y-4z,\ 2x+z,\ -3x-3y+z)$

Scanned by CamScanner

Αν E, F: $\mathbb{K}$-δ.χ τότε: $\mathcal{L}(E,F) = \{f: E \to F \mid f:$ γραμμική απεικόνιση$\}$

Το σύνολο $\mathcal{L}(E,F)$ είναι $\mathbb{K}$-δ.χ με πράξεις

$(f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x})$ και $(\lambda \cdot f)(\vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x})$

Έχουμε και το $\mathbb{K}$-δ.χ $M_{m\times n}(\mathbb{K})$

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω E, F: $\mathbb{K}$-δ.χ και $\dim_{\mathbb{K}} E = n$, $\dim_{\mathbb{K}} F = m$

Έστω B_E: Βάση του E και B_F Βάση του F. Τότε η απεικόνιση

$M: \mathcal{L}(E,F) \to M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $f \longmapsto M(f) \underset{\text{ορ}}{=} M_{B_E}^{B_F}(f)$

είναι ισομορφισμός $\mathbb{K}$-δ.χ

10/01/2018

~~ΘΕΩΡΗΜ~~ **ΘΕΩΡΗΜΑ** Έστω E, F: $\mathbb{K}$-δ.χ και $\dim_{\mathbb{K}} E = n$, $\dim_{\mathbb{K}} F = m$

Έστω $B_E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \ldots \vec{e_n}\}$: Βάση του E

$B_F = \{\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3}, \ldots \vec{\varepsilon_n}\}$: Βάση του F. Τότε η απεικόνιση

$M: \mathcal{L}(E,F) \to M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $f \longmapsto M(f) = M_{B_E}^{B_F}(f)$ ο πίνακας της f ως προς τις βάσεις B_E, B_F

είναι ισομορφισμός

Απόδειξη Έστω $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ και $\lambda \in \mathbb{K}$. Έστω:

$A = (\alpha_{ij}) = M_{B_E}^{B_F}(f)$ όπου: $f(\vec{e_j}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \vec{\varepsilon_i}$, $1 \leq j \leq n$

$B = (\beta_{ij}) \in M_{B_E}^{B_F}(g)$, όπου: $g(\vec{e_j}) = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} \vec{\varepsilon_i}$, $1 \leq j \leq n$

$\forall j = 1, \ldots, n$ $(f+g)(\vec{e_j}) = f(\vec{e_j}) + g(\vec{e_j}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \vec{\varepsilon_i} + \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} \vec{\varepsilon_i} = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) \vec{\varepsilon_i}$

Άρα $M_{B_E}^{B_F}(f+g) = (\gamma_{ij})$ και: $\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$. Επομένως $M_{B_E}^{B_F}(f+g) = M_{B_E}^{B_F}(\alpha_{ij} + \beta_{ij})$

$= (\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) = M_{B_E}^{B_F}(f) + M_{B_E}^{B_F}(g) \Rightarrow M(f+g) = M(f) + M(g)$ ①

$\forall j = 1, \ldots, n$: $(\lambda \cdot f)(\vec{e_j}) = \lambda f(\vec{e_j}) = \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \vec{\varepsilon_i} = \sum_{i=1}^{m} (\lambda \alpha_{ij}) \vec{\varepsilon_i}$ Άρα

ο πίνακας $M_{B_E}^{B_F}(\lambda \cdot f) = (\lambda \alpha_{ij}) = \lambda(\alpha_{ij}) = \lambda M_{B_E}^{B_F}(f) \Rightarrow M(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot M(f)$ ②

①, ② $\Rightarrow$ Η απεικόνιση M είναι γραμμική

Απόδειξη Έχουμε δείξει ότι: $\forall f, g \in \mathcal{L}(E,F)$: $M_{B_E}^{B_F}(f) = M_{B_E}^{B_F}(g) \Rightarrow f = g$

$\Rightarrow$ η απεικόνιση M είναι 1-1 και άρα η M: μονομορφισμός

Μένει να δείξουμε ότι η M είναι επιμορφισμός.

10/01/2018

Εστω $A=(\alpha_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Θεωρούμε τα διανύσματα

$\vec{e_1} \in E \;\ldots\; \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\vec{\varepsilon_i} \in F$

$\vdots$

$\vec{e_n} \in E \;\ldots\; \sum_{i=1}^{m} \alpha_{in}\vec{\varepsilon_i} \in F$

Απο το Θεώρημα Γραμμικής επέκτασης έπεται οτι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f: E \to F$ έτσι ώστε

$f(\vec{e_1}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\vec{\varepsilon_i}$

$\vdots$

$f(\vec{e_n}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{in}\vec{\varepsilon_i}$

δηλαδή $f(\vec{e_j}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\vec{\varepsilon_i}$, $1 \leq j \leq n$

Άρα η M είναι επιμορφισμός

Επομένως η M είναι ισομορφισμός

Πόρισμα: Αν E, F: $\mathbb{K}$-δ.χ πεπερασμένης διάστασης, τότε ο $\mathbb{K}$-δ.χ $\mathcal{L}(E,F)$ έχει πεπερασμένη διάσταση και $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{L}(E,F) = \dim_{\mathbb{K}}E \cdot \dim_{\mathbb{K}}F$

Απόδειξη $\mathcal{L}(E,F) \cong M_{m\times n}(\mathbb{K})$, όπου $m=\dim_{\mathbb{K}}F$, $n=\dim_{\mathbb{K}}E$

Επειδή ισόμορφοι $\mathbb{K}$-δ.χ έχουν την ίδια διάσταση $\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{L}(E,F) = \dim_{\mathbb{K}} M_{m\times n}$ $= n\cdot m$

(Το σύνολο πινάκων $\{E_{ij}\}_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$ όπου

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \\ \\ i\text{-γραμμή} \to \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\hphantom{xxxxxxxxxxxx}$ j-στήλη

είναι μια βάση του $M_{m\times n}(\mathbb{K})$)

ΑΣΚΗΣΗ Να βρεθεί μια βάση του $\mathcal{L}(E,F)$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ Θεωρείστε τις γραμμικές απεικονίσεις $M^{-1}(E_{ij})$, $1\leq i\leq m$, $1 \leq j \leq n$

Εφαρμογή Έστω $A=(\alpha_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Τότε ορίζεται η γραμμική απεικόνιση $f_A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ $f_A(X) = A\cdot X$

Έστω $B = \{E_1 \begin{pmatrix} 1\\0\\ \vdots \\0\end{pmatrix} \ldots E_n = \begin{pmatrix} 0\\ \vdots \\1\end{pmatrix}\}$: κανονική βάση του $\mathbb{K}^n$

$C = \{E_1 = \begin{pmatrix} 1\\0\\ \vdots \\0\end{pmatrix} \ldots E_n = \begin{pmatrix} 0\\ \vdots \\1\end{pmatrix}\}$: κανονική βάση του $\mathbb{K}_m$